TRATTATO

DI

ALGEBRA ELEMENTARE

DI

GIUSEPPE BERTRAND

Membro dell' Istituto di Francia.

PRIMA TRADUZIONE ITALIANA CON NOTE ED AGGIUNTE

DI ENRICO BETTI

Professore di Analisi e Geometria superiore nella R. Università di Pisa.

Nuova Edizione, con correzioni.

FIRENZE.

FELICE LE MONNIER.

1862.

AVVERTIMENTO DEL TRADUTTORE.[1]

È mio intendimento pubblicare un intero Corso di Algebra accomodato alle nostre scuole e corrispondente allo stato odierno della scienza, per sodisfare a un bisogno e a un desiderio comunemente sentito. Il nuovo ordinamento degli studi richiede un Corso diviso in due parti; una elementare, l'altra superiore. Quanto alla parte elementare, essendovi già un eccellente Trattato del celebre geometra francese *Giuseppe Bertrand,* ho creduto di non potere far meglio che darlo tradotto e corredato di quelle note ed aggiunte che mi sembravano più convenienti. Quanto alla parte superiore, ne pubblicherò io stesso un Trattato originale, e perciò qui ne ho tralasciati i pochi principj che si trovano nell'Opera del *Bertrand,* e che in quello saranno esposti con maggiore ampiezza.

Nella presente traduzione sono state omesse anche le teoriche delle progressioni e la parte elementare dei logaritmi, perchè esposte assai compiutamente nell'aritmetica del *Bertrand,* pubblicata in italiano con molte note ed aggiunte dal professor *Novi.*

Ho conservato l'ordine e tutte le materie della prima edizione (tranne l'analisi indeterminata di secondo grado, che sarà trattata più estesamente nell'Algebra superiore); perchè anche quello che il *Bertrand* ha tolto nella seconda edizione, per dar luogo ad alcune teoriche che sono negli ultimi programmi per gli esami delle scuole di Francia, mi parve assai facile e importante da doverlo conservare negli Elementi.

[1] I numeri aggiunti dal traduttore sono segnati con asterisco *.

TRATTATO ELEMENTARE D'ALGEBRA.

SPIEGAZIONE DEI SEGNI ALGEBRICI.

I segni abbreviativi che si usano nell'Algebra sono, quasi tutti quei medesimi impiegati nell'aritmetica e perciò conosciuti dal lettore; nondimeno crediamo utile di farne parola.

$+$ è il segno dell'addizione; si pronunzia *più; $a+b$* indica la somma dei due numeri rappresentati da a e da b.

$-$ è il segno della sottrazione; si pronunzia *meno;* $a-b$ indica la differenza dei due numeri rappresentati da a e b.

$\times$ è il segno della moltiplicazione; si pronunzia *moltiplicato per;* $a\times b$ indica il prodotto dei due numeri rappresentati da a e b. Si omette spesso questo segno e s'indica la moltiplicazione scrivendo i fattori l'uno dopo l'altro, ab invece di $a\times b$, $(a+b)(c+d)$ invece di $(a+b)\times(c+d)$. Ciò non può farsi per i prodotti di fattori numerici, perchè allora si dovrebbe, per esempio, rappresentare nello stesso modo il numero 54 e il prodotto 5×4.

$:$ significa *diviso per;* $a:b$ indica il quoziente della divisione dei numeri rappresentati da a e b. S'indicano le divisioni anche scrivendo il dividendo sopra al divisore, e separandoli con una linea orizzontale; $\frac{a}{b}$ indica il quoziente della divisione di a per b.

$\sqrt{}$ indica la radice quadrata; $\sqrt{a}$ indica la radice quadrata del numero rappresentato da a.

$\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$,... $\sqrt[m]{}$ indicano le radici cubica, quarta, ... m^{esima}. Rappresentando con m un numero intiero qualunque, $\sqrt[m]{a}$ indica la radice m^{esima} di a, cioè il numero che moltiplicato $m-1$ volte per sè stesso riproduce a.

$=$ esprime la eguaglianza delle espressioni poste a destra e a sinistra di questo segno; $a=b$ esprime la eguaglianza dei numeri rappresentati da a e b.

$>$ significa *maggiore di;* $a>b$ esprime che il numero rappresentato da a è maggiore del numero rappresentato da b.

$<$ significa *minore di;* $a<b$ esprime che il numero rappresentato da a è minore del numero rappresentato da b.

Allorchè si pone una espressione tra due parentesi, bisogna riguardare come effettuate le operazioni che vi sono indicate, e la parentesi come esprimente il numero che ne risulta. Così

$$c-(a-b-c)$$

indica la differenza che passa tra c e il numero $a-b-c$.

CAPITOLO I.

NOZIONI PRELIMINARI. — ADDIZIONE E SOTTRAZIONE ALGEBRICHE.

—

Definizione dell' Algebra.

1. Nell' algebra si studiano le operazioni indipendentemente dai numeri sui quali si eseguiscono: in ciò sta l' indole propria di questa scienza. Ma sarebbe difficile condurre una linea di divisione precisa tra l' Algebra e l' Aritmetica; infatti, i risultati particolari non possono separarsi compiutamente dalle teoriche generali, e le quistioni d' aritmetica conducono, quasi necessariamente, a proposizioni algebriche.

Formule algebriche.

2. I numeri sui quali si ragiona nell' algebra dovendo restare indeterminati, si rappresentano, in generale, per mezzo di lettere. Quindi è impossibile di eseguire le operazioni, e bisogna contentarsi d' indicarle. Questa indicazione di operazioni da eseguirsi sopra lettere, il valore delle quali non è ancora stabilito, si chiama una *formula algebrica.*

Esempi:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$S = \frac{(a+l)n}{2}$$

sono formule che indicano le operazioni da eseguirsi per fare il quadrato di una somma $a+b$, e per som-

mare una progressione aritmetica che comincia con a e finisce con l.

3. È evidente come debba esser utile il comprendere così, in una formula generale, un numero infinito di risultati particolari; nondimeno sarà bene dimostrarlo per mezzo di alcuni esempi. 1° L'enunciato dei teoremi generali è di molto abbreviato, e quindi reso più facile a ritenersi.

Così invece di dire:

La somma di due numeri è la stessa, qualunque sia l'ordine con cui si fa l'addizione;

Il prodotto non cangia quando s' invertono i due fattori;

Per moltiplicare due potenze di uno stesso numero, basta sommare gli esponenti;

Si scriverà

$$a+b=b+a$$
$$ab=ba$$
$$a^m \times a^n = a^{m+n},$$

e per chi conosce il linguaggio algebrico, queste formule esprimono i teoremi colla stessa chiarezza, che le parole scritte di sopra.

2° L' uso delle formule non abbrevia soltanto gli enunciati dei teoremi, ma ne rende anche più semplici le dimostrazioni. Per darne un esempio sceglierò la questione seguente:

Un mobile si muove con moto uniforme; la sua velocità, cioè lo spazio che percorre nell' unità di tempo, è v: quale sarà lo spazio x percorso nel tempo t? Poichè nel moto uniforme gli spazi percorsi sono proporzionali ai tempi, si ha

$$x:v::t:1,$$

onde si conclude

$$(1) \qquad x = vt,$$

che è la formula richiesta.

Se ne deducono in un modo evidente le altre due

$$(2) \qquad v = \frac{x}{t}$$

$$(3) \qquad t = \frac{x}{v}$$

La formula (1) rende evidenti i teoremi che seguono:

Nel moto uniforme lo spazio percorso in un dato tempo, è proporzionale alla velocità; con una velocità data è proporzionale al tempo, e in generale è eguale al prodotto del tempo per la velocità.

Dalla formula (2) si deducono i teoremi seguenti:

Nel moto uniforme, la velocità è proporzionale allo spazio percorso in un tempo dato, è in ragione inversa del tempo impiegato a percorrere uno spazio dato, e in generale è eguale al rapporto dello spazio al tempo impiegato a percorrerlo.

Finalmente, si conclude dalla formula (3):

Il tempo impiegato a percorrere uno spazio dato è inversamente proporzionale alla velocità; quando la velocità è data, il tempo è proporzionale allo spazio da percorrersi; e in generale, il tempo è eguale al rapporto dello spazio percorso alla velocità del mobile.

Ciascuno di questi teoremi richiederebbe una dimostrazione particolare, più o meno estesa, se si volesse dimostrare direttamente (*); le formule (1), (2) e (3) li rendono evidenti a chiunque conosce il significato delle parole, proporzionali e inversamente proporzionali. (Vedi *Aritmetica.*)

(*) Galileo che non faceva uso delle formule, vi ha consacrato quattro pagine. GIORNATA III^a, *De motu æquabili.*

Recherò anche un altro esempio. Si dimostrano in geometria i seguenti teoremi:

1° Due circonferenze stanno tra loro come i respettivi raggi, o con altre parole, tra una circonferenza C e il suo raggio R vi è un rapporto costante 2π; per conseguenza si ha la formula

$$C=2\pi R;$$

2° Due circoli stanno tra loro come i quadrati dei loro raggi;

3° Un circolo ha per misura il prodotto della sua circonferenza per la metà del suo raggio; con altre parole, la sua area S è misurata dal prodotto $C\times\frac{R}{2}$, e si ha

$$S=C\times\frac{R}{2}=2\pi R\times\frac{R}{2}=\pi R^2;$$

ora, questa ultima formula rende evidente il secondo teorema « la superficie di un circolo è proporzionale al quadrato del suo raggio. » Si potrebbe dunque tralasciare di farne un teorema distinto dagli altri due, e non si deve darne, ciò che più importa, una dimostrazione diretta.

Enunciando soltanto i teoremi senza esprimerne le conseguenze con formule, questa dipendenza delle proposizioni potrebbe sfuggire.

Classazione delle formule.

4. Le espressioni algebriche possono comprendere la indicazione delle sei operazioni: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, inalzamento a potenza e estrazione di radice.

Una espressione è *razionale,* allorchè non vi è in-

dicata alcuna estrazione di radice. Nel caso opposto, è *irrazionale.*

Una espressione razionale che non contiene alcuna divisione, si dice *intiera;* altrimenti, dicesi *frazionaria.*

Una espressione che non contiene l'indicazione di alcuna addizione o sottrazione, dicesi *monomio.*

Se un fattore di un monomio è numerico, prende il nome di *coefficiente.*

Più monomi aggiunti o sottratti formano un polinomio, di cui essi sono i termini. Due termini d' uno stesso polinomio si dicono *simili,* allorchè non differiscono che nel coefficiente. In questo caso, si possono sempre ridurre a un solo. Per esempio, avendo in uno stesso polinomio i due termini $+7a^3b$, $-5a^3b$, si potrebbe evidentemente sostituire ad essi $+2a^3b$.

Un polinomio di due o tre termini si chiama *binomio* o *trinomio.*

Esempi:

$\sqrt[3]{a^2+b^2}-\sqrt{a+b+c}$, espressione irrazionale;

$\dfrac{a^3-b}{a^2+b^2+c^2}$, espressione razionale frazionaria;

$(a^3+b^3-c^3)(a^2+b^2)$, espressione razionale intiera;

$15a^3b^4\sqrt{c}$, monomio di cui 15 è il coefficiente;

$a^3+2a-b\sqrt{c}$, polinomio.

Addizione e sottrazione dei Polinomj.

5. Le operazioni algebriche facendosi sopra quantità espresse per mezzo di lettere, è impossibile che siano eseguite compiutamente, e bisogna contentarsi d' indicarle. Quindi il calcolo algebrico consiste soltanto nel transformare una formula in un' altra più semplice, ma equivalente.

ESEMPIO: Quando si sostituisce a^4 al prodotto $a^2 \times a^2$, o $a+b$ alla espressione $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$, si fa un'operazione algebrica, e si dice qualche volta, che così si eseguisce il prodotto di a^2 per a^2, o l'estrazione della radice quadrata di $a^2+2ab+b^2$.

L'addizione e la sottrazione essendo le operazioni più semplici, è evidente che non si possono semplicizzare: quindi sopra le medesime non ci rimane a fare altro che alcune facilissime osservazioni.

1° Una somma rimane la stessa in qualunque ordine si aggiungano le sue parti.

2° Un polinomio non cangia valore, qualunque sia l'ordine col quale si scrivono i suoi termini. Infatti, è sempre eguale all'eccesso della somma di quelli che sono preceduti dal segno $+$ sopra la somma di quelli preceduti dal segno $-$.

3° Per aggiungere a un numero la somma di più altri, basta aggiungergli successivamente ciascuno di essi.

4° Per aggiungere a un numero la differenza di altri due, basta aggiungere il primo e togliere il secondo dal risultato.

5° Per togliere da un numero la somma di più altri, basta sottrarre successivamente ciascuno di essi.

6° Per togliere da un numero la differenza di altri due, basta aggiungere il secondo e togliere il primo dal risultato.

Infatti, una differenza non cangia allorchè si aggiunge uno stesso numero ai suoi due termini, e quindi

$$a-(b-c)=a+c-(b-c+c)=a+c-b.$$

Questi principj si esprimono colle seguenti formule:

$$(1) \quad a+b+c+d=d+c+b+a;$$
$$(2) \quad a-b+c-d=c+a-b-d;$$
$$(3) \quad a+(b+c+d)=a+b+c+d;$$

(4) $a+(b-c)=a+b-c$;
(5) $a-(b+c)=a-b-c$;
(6) $a-(b-c)=a+c-b$;

6. I principj che abbiamo enunciato conducono alle seguenti regole:

Regola di Addizione.

Per aggiungere a un numero un polinomio qualunque, bisogna aggiungergli i termini preceduti dal segno + e togliere gli altri dal risultato.

Infatti, si debba aggiungere a P il polinomio

$$a-b+c-d-e+f,$$

questo polinomio (5,2°) è eguale ad

$$(a+c+f)-(b+d+e);$$

e si ha (5,4°)

$$P+\{(a+c+f)-(b+d+e)\}=P+(a+c+f)-(b+d+e)$$
$$=P+a+c+f-b-d-e;$$

che è precisamente quello che volevamo dimostrare:

Regola di sottrazione.

Per togliere da un numero un polinomio qualunque, bisogna aggiungere a questo numero i termini che nel polinomio sono preceduti dal segno —, e sottrarre gli altri dal risultato.

Infatti, si debba togliere da P il polinomio

$$a-b+c-d-e+f;$$

questo polinomio (5,2°) è eguale ad

$$(a+c+f)-(b+d+e);$$

e abbiamo (5,6°)

$$P-\{(a+c+f)-(b+d+e)\}=P+(b+d+e)-(a+c+f)$$
$$=P+b+d+e-a-c-f;$$

che è quello appunto che volevamo dimostrare.

Osservazione. Poichè l'ordine con cui si scrivono i termini di un polinomio è indifferente, si possono enunciare queste due regole nel modo seguente:

Per aggiungere a un numero P un polinomio qualunque, bisogna scrivere i suoi differenti termini di seguito a P, conservando loro i segni che avevano.

Per togliere da un numero P un polinomio qualunque, bisogna scrivere i suoi differenti termini di seguito a P, cangiando il segno a ciascuno di essi.

Enunciato più semplice dei resultati precedenti.

7. La forma dei resultati precedenti può rendersi più semplice per mezzo di una convenzione utilissima nell'Algebra, la quale consiste nel riguardare tutti i termini di un polinomio come *aggiunti* gli uni agli altri, chiamando numeri *negativi*, quelli che sono preceduti dal segno —. Per esempio, si riguarderà la differenza $a-b$ come risultante dalla addizione di a con $-b$,

$$(1) \qquad a-b=a+(-b).$$

La espressione isolata $(-b)$ non acquista perciò alcun significato; soltanto si dice aggiungere $-b$ invece di dire sottrarre b. Si conviene egualmente che sottrarre $-b$ significa aggiungere b.

$$(2) \qquad a-(-b)=a+b.$$

Sarebbe assurdo tentare di dimostrare le formule (1) e (2), perchè le definizioni non si dimostrano. Ma si

può osservare che la convenzione espressa dalla formula (2) è una conseguenza naturale della prima. Infatti, se non si facesse questa seconda convenzione, aggiungendo e togliendo successivamente $-b$ a un numero, le due operazioni non si distruggerebbero.

8. Le due convenzioni precedenti permettono di ridurre la regola di addizione all' enunciato seguente.

Per aggiungere due polinomi, bisogna aggiungere al primo tutti i termini del secondo, qualunque siano i loro segni.

Infatti, siano i due polinomi

$$a-b+c \text{ e } m-n+p-q,$$

la loro somma è

$$a-b+c+m-n+p-q,$$

che equivale, per le nostre convenzioni, ad

$$a-b+c+m+(-n)+p+(-q),$$

che corrisponde all' enunciato.

9. Le stesse convenzioni permettono di ridurre la regola della sottrazione all' enunciato seguente:

Per sottrarre un polinomio da una quantità qualunque A, *basta togliere successivamente da* A *i differenti termini del polinomio.*

Infatti, si debba togliere da A il polinomio $m-n-p+q$; abbiamo veduto (6) che

$$A-(m-n-p+q)=A-m+n+p-q$$

ovvero, per le nostre convenzioni

$$A-(m-n-p+q)=A-m-(-n)-(-p)-q,$$

che corrisponde all' enunciato.

Osservazione. L'introduzione dei numeri negativi ci ha permesso di enunciare, con più concisione, alcuni resultati, senza aggiungere o togliere nulla ai medesimi. Vedremo che tale è sempre, nell'algebra, lo scopo della loro introduzione.

10. Se si considera una differenza $a-b$, e si suppone b maggiore di a, la operazione è impossibile; si conviene allora di riguardare la espressione $a-b$ come rappresentante una quantità negativa eguale al numero di cui b supera a, cioè

$$a-b=-(b-a).$$

Questa convenzione è naturalissima; e non facendola, si distruggerebbe l'analogia perfetta che esiste tra le operazioni fatte sui numeri negativi e sui positivi. Infatti, sia d l'eccesso di b sopra a, $a-b$ sarà eguale ad $a-(a+d)$; se dunque si applica la regola di sottrazione (9), si avrà

$$a-b=a-(a+d)=a-a-d=-d=-(b-a).$$

Osservazione. Questo ragionamento prova che è naturale il fare la convenzione di cui si tratta, ma non dimostra la formula

$$a-b=-(b-a).$$

Infatti, esso è fondato sopra l'applicazione d'una regola di sottrazione, che fin ora non ha alcun senso fuori che quando le sottrazioni sono possibili; è naturale e comodo di estenderla a tutti i casi, ma nondimeno è arbitraria.

11. La convenzione fatta permette di generalizzare dei resultati, che altrimenti si dovrebbero enunciare con restrizioni. Si ha, per esempio,

$$c+a-b=c+(a-b).$$

Questa formula è evidente, allorchè a è maggiore di b. La nostra convenzione la rende vera in tutti i casi, perchè se a è minore di b, si ha $(a-b)=-(b-a)$ e quindi

$$c+(a-b)=c-(b-a)=c+a-b.$$

Si vedrà nello stesso modo, che la formula

$$c-(a-b)=b+(c-a)$$

diviene vera, in conseguenza delle nostre convenzioni, anche quando c è minore di a.

12. Nelle questioni di Algebra, a e b rappresentano numeri indeterminati, e non si conosce quale è il maggiore; quindi è facile intendere quanto importa che le formule si applichino indifferentemente a tutti i casi, e per conseguenza di quanta utilità siano le convenzioni che si sono fatte sui numeri negativi.

Esercizi.

1° $\overline{O \quad A \quad B}$

Due corrieri percorrono la linea OA. Alla partenza sono in A e B, alle distanze a e a' dal punto O, e si allontanano colle velocità v e v'. Trovare le formule che danno la distanza dei due corrieri dopo il tempo t, e la distanza dal punto O al punto di mezzo della retta che gli congiunge.

2° Verificare la formula

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$$

Mostrare la sua identità con

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B).$$

3° Sopra una strada ferrata, quando la velocità del treno è constante, la trazione che deve esercitare la locomotiva si compone degli attriti delle rote dei carri sulle rotaie, e della

resistenza dell'aria. L'attrito è indipendente dalla velocità e proporzionale al peso totale del treno. La resistenza dell'aria, al contrario, è indipendente dal peso del treno e proporzionale al quadrato della velocità. L'attrito essendo F, quando il peso è P, e la resistenza dell'aria essendo R, quando la velocità è V, trovare una formula che esprima la trazione quando il peso è P', e la velocità è V'.

+4° Tre vasi contengono acqua e vino; il primo a litri di acqua e b di vino; il secondo a' litri di acqua e b' di vino; il terzo a'' di acqua e b'' di vino. Si prende la metà del liquido contenuto nel primo vaso e si versa nel secondo; poi il terzo del liquido che si trova allora contenuto in questo, e si versa nel terzo. Trovare una formula che indichi le quantità di acqua e di vino contenute in ogni vaso dopo queste operazioni.

5° Due vasi di capacità v e v' sono ripieni, uno di acqua l'altro di vino. Si riempiono contemporaneamente coi liquidi di questi due vasi, due nuovi vasi di capacità U, e si versa in v ciò che è stato preso in v' e reciprocamente. Si ricomincia tre volte questa operazione. Trovare una formula che esprima le quantità di vino contenute in ciascuno di questi vasi.

6° Se si fa incominciar l'anno al primo di marzo, dimostrare che il posto che occupa tra i giorni dell'anno l'm^{esimo} dell'$(n+1)^{esimo}$ mese incominciando dal Marzo, è dato dalla formula

$$m+31n-p,$$

p essendo il maggior numero intero contenuto nella frazione

$$\frac{5n+4}{12}.$$

7° Si mescolano H ettolitri di acquavite a D gradi con H' ettolitri a D' gradi; si domanda il grado e il prezzo del miscuglio. Si sa che il grado indica quante parti di alcool vi sono per cento di acquavite, e che il prezzo di un ettolitro essendo P quando il grado è N, aumenta o diminuisce di una quantità a per l'aumento o diminuzione di una unità nel grado.

CAPITOLO II.

MOLTIPLICAZIONE ALGEBRICA.

Moltiplicazione dei monomi.

13. Per moltiplicare due prodotti di più fattori, bisogna formare un prodotto unico composto dei fattori che entrano in ciascuno di essi.

In un prodotto unico si può sostituire a due o più fattori il loro prodotto eseguito. (Vedi *Aritmetica.*)

Dal primo di questi due principj si deduce che il prodotto di due monomi intieri è eguale a un monomio che contiene i fattori di ambedue; per esempio:

$$5a^2d^4c \times 4a^3b^2e = 5.a^2.d^4.c.4.a^3.b^2.e$$

Per il secondo dei principj enunciati, si può, nel risultato, sostituire a 5×4, il loro prodotto 20, ad a^3 e a^2 il loro prodotto a^5 (vedi *Aritmetica*); di modo che il prodotto dei due monomi considerati è

$$5a^2d^4c \times 4a^3b^2e = 20a^5d^4b^2ce.$$

Il metodo è generale, e conduce alla regola seguente:

Il prodotto di due monomi intieri si ottiene moltiplicando i coefficienti tra loro, dando a ogni lettera comune ai due monomi (come a ***nell' esempio precedente) un esponente eguale alla somma di quelli dai quali è affetta in ognuno di essi, e prendendo le altre lettere come fattori, senza cangiare i loro esponenti.***

14. Per moltiplicare uno per l'altro due monomi frazionari, si osserva (vedi *Aritmetica*) che il prodotto di

due espressioni frazionarie è eguale al prodotto dei numeratori diviso per quello dei denominatori. Questi due prodotti si faranno colla regola precedente, e s'indicherà quindi la loro divisione, separandoli con una linea orizzontale. Si può quindi render più semplice il risultato, sopprimendo i fattori comuni ai due termini.

Esempio. Sia $\frac{4a^3bc}{5f^2gh^2}$ da moltiplicarsi per $\frac{10af^3h^4}{7b^2g^3}$, il prodotto è eguale a

$$\frac{40a^4bcf^3h^4}{35f^2h^2g^4b^2};$$

ma si può render più semplice togliendo dai due termini i fattori $5, b, f^2$ e h^2, e allora rimane

$$\frac{8a^4cfh^2}{7g^4b}.$$

Osservazione. Quando un monomio frazionario è ridotto alla sua più semplice espressione, nessuna lettera deve trovarsi contemporaneamente nei due termini, perchè allora potrebbe sopprimersi tante volte quante si trova nel termine che ha il minore esponente.

15. Ciò che precede permette di fare la moltiplicazione di un numero qualunque di monomi. Infatti basterà moltiplicare tra loro i due primi, poi il prodotto, che è un monomio, per il terzo, e così di seguito.

Moltiplicazione dei polinomi.

16. Al prodotto di due polinomi si può sempre sostituire un polinomio unico, del quale ora daremo la legge di formazione, e che spesso si chiama il loro *pro-*

dotto eseguito. 1° Consideriamo due polinomi che abbiano tutti i termini separati tra loro dal segno $+$. Sia

$$a+b+c$$

da moltiplicarsi per

$$p+q+r,$$

a, b, c, p, q, r indicando numeri qualunque che possono essere rappresentati da espressioni algebriche più o meno complicate.

Per moltiplicare un numero qualunque per $p+q+r$, bisogna, evidentemente, moltiplicarlo per p, poi per q, poi per r, e sommare i risultati; quindi abbiamo

$$(a+b+c)(p+q+r)=(a+b+c)p+(a+b+c)q+(a+b+c)r;$$

ma per moltiplicare per p una somma $a+b+c$, bisogna evidentemente moltiplicare ogni sua parte per p, abbiamo dunque

$$(a+b+c)p=ap+bp+cp,$$

ed egualmente

$$(a+b+c)q=aq+bq+cq,$$
$$(a+b+c)r=ar+br+cr;$$

e quindi

$$(a+b+c)(p+q+r)=ap+bp+cp+aq+bq+cq+ar+br+cr,$$

risultato che può enunciarsi così:

Il prodotto di due polinomi, i termini dei quali sono positivi, è eguale alla somma dei prodotti ottenuti col moltiplicare tutti i termini del moltiplicando per tutti quelli del moltiplicatore.

17. Supponiamo ora che i due polinomi da moltiplicarsi contengano termini preceduti dal segno —.

Rappresentiamo con A la riunione dei termini preceduti dal segno $+$ nel moltiplicando, con B la riunione di quelli preceduti dal segno $-$; con P e Q le somme analoghe nel moltiplicatore; bisogna moltiplicare

$$A-B$$

per

$$P-Q;$$

A, B, P e Q essendo quattro polinomi con i termini tutti positivi. Ora, per moltiplicare un numero qualunque per una differenza $P-Q$, bisogna evidentemente moltiplicarlo per P, poi per Q, e sottrarre i risultati; si ha dunque

$$(A-B)(P-Q)=(A-B)P-(A-B)Q;$$

ed essendo

$$(A-B)P=P(A-B)=PA-PB,$$
$$(A-B)Q=Q(A-B)=QA-QB,$$

si conclude (6)

$$(A-B)(P-Q)=PA-PB-QA+QB.$$

Tale è dunque l'espressione del prodotto richiesto.

PA, PB, QA, QB sono prodotti di polinomi, che hanno tutti i termini positivi; si eseguiranno come si è detto (16). È evidente che il risultato conterrà il prodotto di ogni termine del moltiplicando per ogni termine del moltiplicatore, ogni prodotto avendo il segno determinato dalle regole seguenti:

I termini derivanti da PA e da QB, cioè dal prodotto di due termini preceduti dal segno $+$, o di due termini preceduti dal segno $-$, sono preceduti dal segno $+$.

I termini che derivano da PB e da QA, cioè dal

prodotto di due termini preceduti da segni differenti, sono preceduti dal segno —.

Modo più semplice d'enunciare i resultati precedenti.

18. L'enunciato dei resultati precedenti si rende più semplice considerando, come abbiamo già fatto (7), i termini che sono preceduti dal segno —, come numeri *negativi* aggiunti ai termini precedenti, e adottando inoltre le definizioni seguenti:

Il prodotto di un numero negativo $-a$ per un numero positivo $+b$ è $-(a\times b)$.

Il prodotto di due numeri negativi $-a$ e $-b$ è $a\times b$.

Con queste *convenzioni* la regola della moltiplicazione si può enunciare nel seguente modo: *il prodotto di due polinomi si ottiene col moltiplicare tutti i termini del moltiplicando per tutti quelli del moltiplicatore, e* SOMMANDO *i resultati ottenuti.*

Si debba, per esempio, moltiplicare

$$a-b$$

per

$$c-d;$$

il prodotto è (17)

$$ac-bc-ad+bd,$$

o, per le nostre convenzioni

$$ac+(-b)c+(-d)a+(-b)(-d),$$

che è la somma dei prodotti ottenuti col moltiplicare i termini a e $-b$ del moltiplicando, per i termini c e $-d$ del moltiplicatore.

19. Osservazione I. Non si deve tentare di dimostrare le formule

$$(-a)(b) = -ab,$$
$$(-a)(-b) = ab,$$

perchè esprimono delle definizioni. Queste definizioni permettono di comprendere in un solo enunciato i differenti casi, che altrimenti bisognerebbe distinguere nella regola della moltiplicazione dei polinomi.

20. Osservazione II. Abbiamo veduto (17) che

$$(1) \qquad (A-B)(M-P) = AM-BM-AP+BP.$$

La dimostrazione supponeva che A e M fossero rispettivamente maggiori di B e di P; le convenzioni fatte rendono vera questa formula in tutti i casi.

Infatti; supponiamo che uno dei fattori sia negativo; che si abbia, per esempio,

$$A<B,$$
$$M>P.$$

$A-B$ essendo negativo e eguale a $-(B-A)$, abbiamo, per le nostre convenzioni,

$$(A-B)(M-P) = -(B-A)(M-P) = -(BM-AM-PB+PA) =$$
$$-BM+AM+PB-PA,$$

che coincide in tutto, fuori che nell'ordine dei termini, colla formula (1).

Supponiamo ora che le due differenze $A-B$ e $M-P$ siano negative; il loro prodotto sarà (18) lo stesso che se fossero prese positivamente, e si avrà

$$(A-B)(M-P) = (B-A)(P-M) = BP-AP-BM+AM,$$

che è conforme alla formula (1).

21. Osservazione III. Rappresenteremo in seguito

un polinomio qualunque, e qualunque siano i segni dei suoi termini, con un espressione della forma

$$a+b+c+p+q+r,$$

a, b, c, p, q, r, rappresentando numeri positivi o negativi.

Esempio. La formula

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$

che risulta immediatamente dalla regola della moltiplicazione, è vera, per ciò che abbiamo detto, qualunque siano i segni delle quantità a e b. Si può dunque supporre che b vi rappresenti un numero negativo $-b'$. Questa formula diviene allora

$$(a-b')^2 = a^2+2a(-b')+(-b')^2 = a^2-2ab'+b'^2.$$

Le formule che danno il quadrato di una somma e di una differenza si trovano così ridotte a una sola.

22. Osservazione IV. Le formule

$$(-a)b = -ab,$$
$$(-a)(-b) = ab$$

esprimono convenzioni fatte nella ipotesi che a e b siano numeri positivi; ma è facile a vedersi che, per le stesse convenzioni, queste formule sussistono anche quando a e b rappresentano numeri negativi.

Infatti; supponiamo che a rappresenti un numero negativo $-a'$; $-a$ sarà allora eguale ad a'; e le formule diverranno:

$$a'b = -(-a')b,$$
$$a'(-b) = (-a')b;$$

ora $(-a')b$ è eguale a $-a'b$, e quindi $-(-a')b$ è eguale a $a'b$; con che riman dimostrata la prima formula: $a'(-b)$

e $(-a')b$ sono ambedue eguali a $-a'b$; con che rimane dimostrata la seconda.

Supponiamo ora che a e b rappresentino ambedue dei numeri negativi, $-a'$ e $-b'$; $-a$ e $-b$ saranno allora eguali ai numeri positivi a' e b', e le formule diverranno:

$$a(-b') = -(-a')(-b'), \qquad a'b' = (-a')(-b'),$$

che sono conformi alle convenzioni stabilite.

23. Osservazione V. Allorchè si hanno più fattori, alcuni dei quali sono negativi, il prodotto si definisce come in aritmetica: è il resultato ottenuto moltiplicando il primo per il secondo; poi moltiplicando il prodotto eseguito per il terzo; poi il risultato per il quarto, e così discorrendo. Dal che ne segue che il prodotto avrà lo stesso valore assoluto che se tutti i fattori fossero riguardati come positivi. Sarà preceduto dal segno $+$ se il numero dei fattori negativi è pari, e dal segno $-$ se è dispari. Per dimostrarlo, osserviamo che si può sempre introdurre $+1$ come primo fattore. Nelle moltiplicazioni successive che bisognerà eseguire per fare il prodotto, il segno che così è al principio $+$, cangerà tante volte quanti fattori negativi vi sono: ora è evidente che ridiverrà $+$ se il numero dei cangiamenti è pari, e $-$ nel caso contrario.

Risulta evidentemente da quel che precede, che le potenze pari di un numero negativo sono positive, e le potenze dispari negative.

24. Chiamando quoziente di due numeri A e B, un terzo numero, che, moltiplicato per il divisore B, riproduce il dividendo A, è evidente che, secondo le convenzioni precedenti, il valore assoluto del quoziente di due numeri non dipende dai loro segni, e che questo quoziente è positivo, se il dividendo e il divisore hanno lo stesso segno, e negativo nel caso contrario.

Moltiplicazione di un numero qualunque di polinomi.

25. Per fare il prodotto di un numero qualunque di polinomi, bisogna moltiplicare il primo per il secondo, poi il resultato per il terzo, e così di seguito. Poichè il prodotto eseguito di due polinomi è sempre un polinomio, basterà, qualunque sia il numero dei fattori, sapere moltiplicare due polinomi uno per l'altro.

Siano P_1, P_2, P_3, P_4, i polinomi dei quali si vuol fare il prodotto; moltiplicando P_1 per P_2, si otterrà un prodotto Q_1 i termini del quale sono (18) i prodotti di tutti i termini di P_1 per tutti quelli di P_2, si moltiplicherà Q_1 per P_3, e si otterrà un prodotto Q_2 che sarà la somma dei prodotti di tutti i termini di Q_1 per tutti quelli di P_3; cioè la somma di tutti i prodotti di tre fattori, che si ottengono, prendendo un fattore tra i termini di P_1, uno tra i termini di P_2 e uno finalmente tra i termini di P_3. Quindi Q_2 si moltiplicherà per P_4. Il risultato Q_3 di questa moltiplicazione sarà la somma dei prodotti dei termini di Q_2 per quelli di P_4; cioè, di tutti i prodotti di quattro fattori presi rispettivamente nei polinomi P_1, P_2, P_3, P_4. Si potrà così continuare indefinitamente il ragionamento, e si vedrà che il *prodotto dei polinomi* P_1, P_2, P_3, ... P_n *è la somma di tutti i prodotti di* n *fattori, formati con un termine di* P_1, *uno di* P_2, *uno di* P_3, ... *e uno di* P_n.

Prodotto di due polinomi ordinati rapporto a una lettera.

26. Si dice che un polinomio è ordinato rapporto a una lettera, quando i termini sono disposti secondo l'ordine di grandezza degli esponenti di questa lettera;

in modo che gli esponenti vadano continuamente diminuendo o aumentando dal primo fino all' ultimo.

ESEMPIO. $8x^5+3x^4+2x^2-x-1$
è un polinomio ordinato rapporto a x.

OSSERVAZIONE I. Se la lettera rapporto a cui si ordina, si trova in più termini collo stesso esponente, si riuniscono questi termini in un solo, e si riguarda come coefficiente di questa potenza della lettera ordinatrice, la somma dei fattori che la moltiplicano in questi differenti termini.

ESEMPIO. Per ordinare il polinomio

$$a^5+4a^3b+2a^3c^2+a^2b+c,$$

rapporto ad a, si scrive nel modo seguente:

$$a^5+(4b+2c^2)a^3+ba^2+c.$$

OSSERVAZIONE II. L'esponente che ha la lettera ordinatrice in un termine si chiama il grado di questo termine. Il grado di un polinomio è quello del termine di grado maggiore.

Non vi è da mutar niente nella regola della moltiplicazione, quando si vuole applicarla a due polinomi ordinati rapporto a una stessa lettera. Faremo soltanto una osservazione sulla forma del risultato.

Quando sarà eseguito il prodotto, si potrà diminuire il numero dei suoi termini, riunendo quelli che sono simili (4); ma si può dimostrare, e questa osservazione è molto importante, che almeno due termini del prodotto sussisteranno senza riduzione. Questi due termini sono: il prodotto del primo termine del moltiplicando per il primo del moltiplicatore, e il prodotto dell' ultimo termine del moltiplicando per l' ultimo del moltiplicatore.

Infatti; è evidente che il primo di questi prodotti conterrà la lettera ordinatrice a una potenza più alta, e

il secondo a una potenza meno alta di tutti gli altri. Non potranno adunque ridursi con essi, finchè la lettera ordinatrice rimarrà indeterminata.

Esempio. Se si moltiplica

$$x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$$

per

$$x-1,$$

il termine x^8 e il termine -1, che nascono rispettivamente dalla moltiplicazione dei primi e degli ultimi termini tra loro, non si ridurranno con alcun altro. Eseguendo la moltiplicazione, si trova che il prodotto si riduce a questi due soli termini, gli altri distruggendosi due a due.

27. Il prodotto di due polinomi è, per ciò che abbiamo detto, composto almeno di due termini. Se i polinomi contengono più lettere, potranno ordinarsi successivamente rapporto a ciascuna di esse, e applicando la precedente osservazione, si otterrà un certo numero di termini che dovranno sussister senza riduzione nel prodotto. Se, per esempio, si moltiplicano i due polinomi seguenti, ordinati rapporto ad a,

$$a^4+a^3b^5+a^2b^3+b^4,$$
$$a^6+a^4b+a^3b^7+ab^2;$$

i termini $a^4\times a^6$, $b^4\times ab^2$ dovranno sussister senza riduzione nel prodotto. Ordinando i medesimi polinomi rapporto a b, i primi termini sono a^3b^5 e a^3b^7, e gli ultimi a^4 e a^6; i due termini $a^3b^5\times a^3b^7$ e $a^4\times a^6$ dovranno dunque sussistere senza riduzione nel risultato. Il termine $a^4\times a^6$ si presenta, come si vede, in due modi differenti, e abbiamo soltanto tre termini distinti che nel risultato non possono provare riduzione.

Esercizi.

1° Il quadrato di un polinomio è eguale alla somma dei quadrati dei suoi termini, più due volte la somma dei loro prodotti due a due.

2° Il cubo di un polinomio è eguale alla somma dei cubi dei suoi termini, più tre volte la somma di un termine per il quadrato di un altro, più sei volte la somma dei prodotti dei termini tre a tre.

3° $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = (ap+bq+cr+ds)^2$ $+(aq-bp+cs-dr)^2+(ar-cp+dq-bs)^2+(br-cq+as-dp)^2$.

4° Se poniamo

$$a+b+c+d = A,\ a+b-c-d = B,$$
$$a-b+c-d = C,\ a-b-c+d = D,$$

ed è

$$ab(a^2+b^2) = cd(c^2+d^2);$$

avremo

$$AB(A^2+B^2) = CD(C^2+D^2).$$

5° Se poniamo

$$bc-p^2 = A,\ ac-q^2 = B,\ ab-r^2 = C,$$
$$qr-ap = P,\ pr-bq = Q,\ pq-cr = R,$$

avremo

$$(abc+2pqr-ap^2-bq^2-cr^2)^2 = ABC+2PQR-AP^2-BQ^2-CR^2$$

6° Ponendo

$$A = 3abc-a^2d-2b^3,\ B = 2ac^2-abd-b^2c,$$
$$C = acd-2b^2d+bc^2,\ D = ad^2-3bcd+2c^3,$$

si ha

$$(a^2d^2-3b^2c^2+4ac^3+4db^3-6abcd)^3$$
$$= A^2D^2-3B^2C^2+4AC^3+4DB^3-6ABCD.$$

7° Se

$$A = bc'+cb'+aa',\ B = ab'+ba'+cc',\ C = ac'+ca'+bb'$$

sarà

$$(a+b+c)(a'+b'+c') = A+B+C,$$
$$(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)(a'^2+b'^2+c'^2-a'b'-a'c'-b'c')$$
$$= A^2+B^2+C^2-AB-AC-BC,$$
$$(a^3+b^3+c^3-3abc)(a'^3+b'^3+c'^3-3a'b'c') = A^3+B^3+C^3-3ABC.$$

8° Indicando a, b, c, ... k, l numeri qualunque si ha

$$ab(a+b)+(a+b)c(a+b+c)+(a+b+c)d(a+b+c+d)+ \dots$$
$$+(a+b+c+d+\dots+k)l(a+b+c+d+\dots+k+l)$$
$$= lk(l+k)+(l+k)j(l+k+j)+\dots+(l+k+j+\dots+b)$$
$$a(l+k+j+\dots+b+a).$$

+ 9° $2q^2+3z^2+6t^2$ è eguale alla somma di tre quadrati.

10° Siano x, y, z, u, v, w numeri qualunque. Se poniamo

$$m=\frac{x-y}{x+y},\ p=\frac{y-z}{y+z},\ q=\frac{z-u}{z+u},\ r=\frac{u-v}{u+v},\ s=\frac{v-w}{v+w},\ t=\frac{w-x}{w+x},$$

dimostrare che sarà

$$(1+m)(1+p)(1+q)(1+r)(1+s)(1+t)$$
$$= (1-p)(1-q)(1-r)(1-s)(1-t)(1-m).$$

11° $$(p^2+q^2+r^2+s^2+t^2)(p'^2+q'^2+r'^2+s'^2+t'^2)$$
$$-(pp'+qq'+rr'+ss'+tt')^2$$

è una somma di quadrati.

12° Nello sviluppo di $(1+x+2x^2+3x^3+\dots+nx^n)^2$, il coefficiente di x^p, per $p<n$, è eguale a $\frac{p^3+11p}{6}$.

13° Verificare che

$$\frac{x^2y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\frac{(x^2-c^2)(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}$$
$$= x^2+y^2+z^2-c^2-b^2.$$

14° Verificare che

$$\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(z^2-b^2)(b^2-y^2)}{b^2(c^2-b^2)}+\frac{(c^2-z^2)(c^2-y^2)}{c^2(c^2-b^2)} = 1.$$

15° Verificare che

$$\frac{x^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(x^2-b^2)(b^2-z^2)y^2}{(y^2-b^2)b^2(c^2-b^2)}+\frac{(x^2-c^2)(c^2-z^2)y^2}{(c^2-y^2)c^2(c^2-b^2)}=\frac{(x^2-y^2)(y^2-z^2)}{(y^2-b^2)(c^2-y^2)}.$$

16° Verificare che

$$\frac{1}{p^2q^2}=\frac{1}{(p+q)^2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{2}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right).$$

17° Verificare che

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\ldots\ldots(1-x^{m-p})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots\ldots(1-x^{p+1})}$$
$$=\frac{(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\ldots\ldots(1-x^{m-p-1})}{(1-x)(1-x^2)\ldots\ldots\ldots(1-x^{p+1})}$$
$$+x^{m-p-1}\frac{(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})\ldots\ldots(1-x^{m-p})}{(1-x)(1-x^2)\ldots\ldots\ldots(1-x^p)}.$$

18° Se nel polinomio

$$ax^2+2bxy+cy^2$$

si fa la sostituzione

$$x=\alpha x'+\beta y',$$
$$y=\alpha' x'+\beta' y',$$

esso prende la forma

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2,$$

e si ha

$$B^2-AC=(b^2-ac)(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2.$$

19° Se poniamo

$$B=b^2+bc+c^2,\qquad C=b^2c+c^2b,$$

si ottiene

$$4B^3-27C^2=(b-c)^2(2b^2+5bc+2c^2)^2.$$

e quindi $4B^3-27C^2$ è sempre positivo.

20° Verificare le eguaglianze

$$1+x^4=(1+x^2+x\sqrt{2})(1+x^2-x\sqrt{2}),$$
$$1+x^6=(1+x^2)(1+x^2+x\sqrt{3})(1+x^2-x\sqrt{3}).$$

CAPITOLO III.

CALCOLO DEI RADICALI, ESPONENTI NEGATIVI E FRAZIONARI.

28. Il radicale $\sqrt[m]{a}$ rappresenta un numero la cui potenza m^{esima} è eguale ad a. Se noi considerassimo soltanto i numeri positivi, $\sqrt[m]{a}$ avrebbe, secondo questa definizione, un valore unico e determinato; ma le convenzioni fatte nel capitolo precedente ci costringono a dargli un senso più esteso.

1° Se a è positivo, e m è pari, la potenza m^{esima} del numero negativo eguale in valore assoluto a $\sqrt[m]{a}$ sarà eguale ad a; perchè un numero pari di fattori negativi dà (23) un prodotto positivo. In questo caso dunque $\sqrt[m]{a}$ ammette due valori eguali e di segni contrari.

ESEMPIO. $\sqrt{4}$ rappresenta contemporaneamente, per le nostre convenzioni, -2 e 2; perchè ambedue questi numeri hanno 4 per quadrato.

2° Se a è positivo e m dispari, non si può, *per ora*, dare a $\sqrt[m]{a}$ un significato più generale di quello che ha in aritmetica.

3° Se a è negativo e m pari, $\sqrt[m]{a}$ non rappresenta alcun numero nè positivo nè negativo, perchè le potenze pari di un numero sono sempre positive (23).

4° Finalmente, se a è negativo e eguale a $-a'$, e m è dispari, $\sqrt[m]{-a'}$ rappresenta un numero negativo $-\sqrt[m]{a'}$, e abbiamo

$$\sqrt[m]{-a'} = -\sqrt[m]{a'}.$$

Infatti; essendo m dispari, la potenza m^{esima} di $-\sqrt[m]{a'}$ sarà $-a'$ (23).

ESEMPIO. $\sqrt[3]{-8}=-2$,

perchè il cubo di -2 è -8.

Questo modo di generalizzare è nell' algebra di molta importanza: in seguito ci torneremo sopra con maggiore larghezza. Abbiamo creduto bene di cogliere la prima occasione per indicarlo; ma non ne faremo uso in questo capitolo, nel quale considereremo soltanto le radici positive dei numeri positivi.

Riduzione di un radicale a più semplice espressione.

29. Si può spesso render più semplice un radicale, quando il numero che è sotto il medesimo è una potenza.

1° Se l' indice del radicale è eguale al grado della potenza, le due operazioni si distruggono. Così abbiamo

$$\sqrt[m]{a^m}=a.$$

2° Se vi è un fattore comune all' indice del radicale e all' esponente della potenza, si può sopprimere. Così abbiamo

$$\sqrt[mn]{a^{np}}=\sqrt[m]{a^p}.$$

Per dimostrarlo, basta osservare che inalzando ambedue queste espressioni alla potenza mn, si ottengono risultati eguali. Abbiamo infatti

$$(\sqrt[mn]{a^{np}})^{mn}=a^{np},$$
$$(\sqrt[m]{a^p})^{mn}=[(\sqrt[m]{a^p})^m]^n=(a^p)^n=a^{np}.$$

Tutte queste formule sono evidenti, rammentandosi (Ve-

di *Aritmetica*) che la potenza mn di un numero è eguale alla potenza m^{esima} della sua potenza n^{esima}.

3° Quando sotto il radicale vi è un fattore che ha l'esponente eguale all'indice del radicale, si può porre fuori di questo senza l'esponente. Così avremo

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}.$$

Infatti; inalzando queste due espressioni alla potenza n, si ottengono risultati eguali, perchè

$$(\sqrt[n]{a^n b})^n = a^n b,$$
$$(a\sqrt[n]{b})^n = a^n(\sqrt[n]{b})^n = a^n b.$$

Queste formole sono evidenti, se ci rammentiamo che la n^{esima} potenza di un prodotto è il prodotto delle n^{esime} potenze dei fattori.

Potenza di un radicale.

30. Per fare una potenza di un radicale, basta inalzare a questa potenza il numero che è sotto il radicale medesimo:

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

Infatti; le potenze m^{esime} di queste due espressioni sono eguali:

$$[(\sqrt[m]{a})^n]^m = (\sqrt[m]{a})^{mn} = [(\sqrt[m]{a})^m]^n = a^n,$$
$$(\sqrt[m]{a^n})^m = a^n.$$

Queste eguaglianze sono evidenti, se ci rammentiamo che la potenza m^{esima} della potenza n^{esima} è eguale alla potenza mn^{esima}. (Vedi *Aritmetica*).

Radice di un radicale.

31. Per estrarre la radice m^{esima} di un radicale, basta moltiplicarne l' indice per m; cioè

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

Infatti; queste due espressioni inalzate alla potenza mn danno risultati eguali, poichè

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}=\left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right)^{n}=(\sqrt[n]{a})^{n}=a,$$
$$(\sqrt[mn]{a})^{mn}=a.$$

Riduzione di più radicali allo stesso indice.

32. Si possono sempre sostituire due radicali con indici eguali, a due radicali qualunque $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$.

Infatti, abbiamo (29)

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n},$$
$$\sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{b^m}.$$

Si può ridurre allo stesso indice, in un modo simile, un numero qualunque di radicali $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$, $\sqrt[q]{d}$, e l'indice comune è $m\,n\,p\,q$. Si ha infatti

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mnpq]{a^{npq}},$$
$$\sqrt[n]{b}=\sqrt[mnpq]{b^{mpq}},$$
$$\sqrt[p]{c}=\sqrt[mnpq]{c^{mnq}},$$
$$\sqrt[q]{d}=\sqrt[mnpq]{d^{mnp}}.$$

Si può anche dare a più radicali un indice comune eguale al minimo multiplo dei loro indici. Siano, per esempio, i due radicali $\sqrt[m]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$, e μ un multiplo di m e di n in modo che

$$\mu = m\alpha, \quad \mu = n\beta;$$

avremo evidentemente

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m\alpha]{a^\alpha} = \sqrt[\mu]{a^\alpha},$$
$$\sqrt[n]{b} = \sqrt[n\beta]{b^\beta} = \sqrt[\mu]{b^\beta}.$$

Prodotto di più radicali.

33. Per moltiplicare più radicali che hanno lo stesso indice, basta moltiplicare i numeri posti sotto questi radicali, e porre il prodotto sotto un radicale che abbia per indice l'indice comune.

Così avremo

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c} = \sqrt[m]{abc}.$$

Infatti, elevando queste due quantità alla potenza m^{esima}, si ottengono risultati eguali; poichè

$$(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c})^m = (\sqrt[m]{a})^m(\sqrt[m]{b})^m(\sqrt[m]{c})^m = abc,$$
$$(\sqrt[m]{abc})^m = abc.$$

Per moltiplicare tra loro più radicali con indici qualunque, si ridurranno allo stesso indice, e poi si applicherà la regola precedente.

ESEMPIO. $\sqrt[p]{a^m} \times \sqrt[q]{a^n} = \sqrt[pq]{a^{mq}} \times \sqrt[pq]{a^{np}} = \sqrt[pq]{a^{mq+np}}$.

Quoziente di due radicali.

34. Per dividere uno per l'altro due radicali che hanno lo stesso indice, basta dividere i numeri che sono sotto i radicali, e porre il quoziente sotto un segno radicale coll'indice comune; cioè,

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}.$$

Infatti, inalzando queste due espressioni alla stessa potenza m^{esima}, si ottengono risultati eguali; poichè

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m} = \frac{a}{b},$$

$$\left(\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^m = \frac{a}{b}.$$

Per dividere uno per l'altro due radicali qualunque, si ridurranno allo stesso indice, e si applicherà la regola precedente.

Esempio: $\frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{b^n}} = \frac{\sqrt[pq]{a^{mq}}}{\sqrt[pq]{b^{np}}} = \sqrt[pq]{\frac{a^{mq}}{b^{np}}}.$

Esponenti frazionari.

35. I risultati precedenti possono enunciarsi più semplicemente, facendo la convenzione di rappresentare $\sqrt[n]{a^m}$ con $a^{\frac{m}{n}}$, e chiamando $\frac{m}{n}$, l'*esponente* di a.

Prima di mostrare il vantaggio di questa convenzione nell'enunciato delle proposizioni precedenti, fare-

mo osservare che essa non implica contradizioni, e che la espressione $a^{\frac{m}{n}}$ conserva lo stesso valore, sostituendo ad $\frac{m}{n}$ una frazione eguale. Con altre parole, se abbiamo

$$\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'},$$

avremo anche

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m'}{n'}},$$

cioè

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n']{a^{m'}};$$

Per dimostrarlo, riduciamo questi due radicali allo stesso indice; essi diverranno

$$\sqrt[nn']{a^{mn'}},\ \sqrt[nn']{a^{m'n}},$$

che sono identici, perchè essendo $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$, evidentemente sarà $mn'=nm'$.

36. Passiamo a dimostrare che questa nuova notazione permette di generalizzare molti teoremi.

1° Abbiamo (30)

$$(\sqrt[n]{a^m})^p=\sqrt[n]{a^{mp}},$$

ovvero colla nuova notazione

$$(a^{\frac{m}{n}})^p=a^{\frac{mp}{n}};$$

dunque per inalzare una potenza frazionaria $a^{\frac{m}{n}}$ a una potenza p, basta moltiplicare il suo esponente per p.

2° Abbiamo dimostrato (31) che

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}}=\sqrt[np]{a^m},$$

oppure, colla nuova notazione

$$(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{m}{np}};$$

dunque, per inalzare una espressione $a^{\frac{m}{n}}$ alla potenza $\frac{1}{p}$, basta moltiplicare il suo esponente per $\frac{1}{p}$.

3° Si è dimostrato (30–31)

$$\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[qn]{a^{mp}},$$

cioè, colla nuova notazione

$$(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}};$$

dunque, *per inalzare una espressione $a^{\frac{m}{n}}$ alla potenza $\frac{p}{q}$, basta moltiplicare il suo esponente per $\frac{p}{q}$.*

Questa ultima proposizione comprende le due precedenti, che se ne deducono facendo $p=1$ o $q=1$, ed è facile a ritenersi, per l'analogia che essa ha con una proposizione relativa alle potenze intere.

4° Abbiamo (33)

$$\sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}},$$

cioè, colla nuova notazione

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}};$$

dunque, *per moltiplicare due potenze di uno stesso numero basta sommare gli esponenti.*

5° Si ha (34)

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{pn}}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}}.$$

Supponendo $mq > np$, questa eguaglianza può scriversi

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}},$$

ossia,

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

Osservando che abbiamo supposto $mq > np$, e quindi $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, questo risultato può enunciarsi così: *per dividere una potenza di un numero per un' altra potenza di minore esponente, basta sottrarre gli esponenti.*

Come nei casi precedenti, vi è una perfetta analogia con i teoremi che si hanno per gli esponenti intieri.

Esponenti negativi.

37. Si rappresenta spesso la espressione $\frac{1}{a^m}$ con a^{-m}, m indicando qui un numero positivo intero o frazionario. Questa notazione permette, come ora vedremo, di generalizzare ancora di più i teoremi enunciati di sopra.

38. Osserviamo primieramente che la eguaglianza

$$(1) \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

essendo soddisfatta, per definizione, quando m è positivo, lo sarà per la stessa ragione, anche per valori negativi di m; infatti, supponendo $m = -m'$, $-m$ diverrà m', e la formula (1) si cangerà in

$$a^{m'} = \frac{1}{a^{-m'}},$$

e sostituendo ad $a^{-m'}$ il suo valore $\frac{1}{a^{m'}}$,

$$a^{m'}=\frac{1}{\frac{1}{a^{m'}}};$$

che è evidentemente esatta.

39. La convenzione precedente permette, come abbiamo detto, di generalizzare diversi teoremi:

1° La formula

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}, \tag{1}$$

che è stata dimostrata (36, 5°) soltanto per $m>n$, è vera anche quando $m<n$; infatti allora abbiamo

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{\frac{a^n}{a^m}}=\frac{1}{a^{n-m}};$$

ma per la nostra convenzione,

$$\frac{1}{a^{n-m}}=a^{-(n-m)}=a^{m-n};$$

dunque, finalmente,

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}. \tag{2}$$

Osservazione. Supponendo $m=n$, $\frac{a^m}{a^n}$ sarebbe eguale alla unità, ed a^{m-n} diverrebbe a^0; se dunque vogliamo che la formula (2) si estenda anche a questo caso, bisogna far la convenzione di riguardare la potenza zero di un numero come eguale all' unità. Essendo questa una convenzione, non si deve dimostrare.

2° Abbiamo stabilita (36, 3°) la formula

$$(a^m)^n=a^{mn}, \tag{3}$$

qualunque siano i numeri positivi m e n. Questa formula è vera anche se uno o tutti due sono negativi.

Supponiamo primieramente m positivo e n negativo, ed eguale a $-n'$, la formula (3) diviene

$$(a^m)^{-n'} = a^{-mn'},$$

ovvero, per le nostre convenzioni,

$$\frac{1}{(a^m)^{n'}} = \frac{1}{a^{mn'}},$$

che è esatta, perchè $(a^m)^{n'} = a^{mn'}$.

Supponiamo m negativo e eguale a $-m'$, e n positivo; la formula (3) diviene

$$(a^{-m'})^n = a^{-m'n},$$

cioè, per le convenzioni stabilite,

$$\frac{1}{(a^{m'})^n} = \frac{1}{a^{m'n}},$$

che è evidentemente esatta.

Supponiamo finalmente m e n negativi ed eguali a $-m'$ ed a $-n'$: la formula da dimostrarsi diviene

$$(a^{-m'})^{-n'} = a^{(-m')(-n')} = a^{m'n'},$$

ossia, per le nostre convenzioni,

$$(a^{-m'})^{-n'} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{n'}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{m'n'}}} = a^{m'n'},$$

che dimostra la formula (3) anche in questo caso.

3° Abbiamo (36, 4°)

$$(4) \qquad a^m \times a^n = a^{m+n},$$

qualunque siano i numeri positivi m e n.

Questa formula è sempre vera anche se uno dei numeri m e n. o ambedue sono negativi. Supponiamo pri-

mieramente m positivo e n negativo ed eguale a $-n'$; questa formula diverrà

$$a^m \times a^{-n'} = a^{m-n'}.$$

Sostituiamo $\frac{1}{a^{n'}}$ ad $a^{-n'}$, essa diverrà

$$\frac{a^m}{a^{n'}} = a^{m-n'},$$

che è stata dimostrata (39, 1°).

4° Supponiamo ora m e n negativi ed eguali a $-m'$ ed a $-n'$: la formula (4) diviene

$$a^{-m'} \times a^{-n'} = a^{-m'-n'},$$

ovvero

$$\frac{1}{a^{m'}} \times \frac{1}{a^{n'}} = \frac{1}{a^{m'+n'}},$$

che è evidentemente esatta.

5° Dalla formula (4) se ne deduce la seguente:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

perchè sostituendo a^{-n} ad $\frac{1}{a^n}$, quest' ultima diviene

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n},$$

cioè

$$a^m \times a^{-n} = a^{m+(-n)},$$

che è vera (3°), qualunque siano i numeri m e n, positivi o negativi.

Esercizi.

1° $x = \left[-q + (q^2 + p^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-q - (q^2 + p^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$

sodisfa alla equazione

$$x^3 + 3px + 2q = 0.$$

2° Si ha

$$\left[\frac{a+(a^2-b)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{a-(a^2-b)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}=(a+b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}.$$

3° Ridurre

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

4° $$\left\{\left[f+(f^2+e^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[f-(f^2+e^3)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}\right\}^2+2e$$

$$=\left\{e^3+2f^2+\left[(e^3+2f^2)^2-e^6\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}+\left\{e^3+2f^2-\left[(e^3+2f^2)^2-e^6\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

CAPITOLO IV.

EQUAZIONI DI PRIMO GRADO A UNA SOLA INCOGNITA.

—

Definizioni.

40. Si chiama identità la espressione della eguaglianza che esiste tra due quantità numeriche, ovvero tra due formule, quando è verificata per qualsivoglia valore particolare attribuito alle lettere che esse contengono.

ESEMPI. $5=5$, $8=7+1$,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

sono identità.

41. Si dà il nome di *equazione* alla espressione di una eguaglianza, che verificandosi soltanto per alcuni particolari valori delle lettere che contiene, può servire alla determinazione di questi valori.

Le due quantità di cui la equazione esprime la eguaglianza, si chiamano i due *membri* della equazione. Le lettere delle quali ci proponiamo di determinare i valori in modo che rendano esatte una o più equazioni, si dicono le *incognite* di queste equazioni. La loro determinazione constituisce la *risoluzione* della equazione o delle equazioni considerate. La risoluzione delle equazioni è la parte la più importante, e per alcuni autori, il vero scopo dell' algebra.

Principj generali relativi alle equazioni.

42. Teorema. *Si può aggiungere uno stesso numero ai due membri di una equazione, senza alterare le condizioni che essa impone alle incognite.* Infatti, è evidente che le equazioni

$$A = B,$$
$$A + m = B + m$$

sono perfettamente equivalenti, perchè ciascuna è conseguenza dell'altra.

Osservazione I. m rappresenta un numero qualunque positivo o negativo; dunque non aggiungiamo nulla alla generalità dell'enunciato precedente, dicendo, *si può, senza cangiare il significato di una equazione, aggiungere o togliere uno stesso numero ai due membri.*

Osservazione II. Se il numero m è eguale, e di segno contrario a uno dei termini della equazione, lo distruggerà, e questo termine disparirà dal membro in cui si trovava per ricomparire nell'altro con un segno differente. *Si può dunque trasportare un termine da un membro nell'altro, purchè gli si cangi il segno.*

Esempio. Sia la equazione

$$2 + x = 5 - 3x,$$

aggiungendo $-x$ ai due membri, si ottiene

$$2 = 5 - 3x - x,$$

e il termine x è passato, come si vede, da un membro nell'altro, cangiando segno.

43. Teorema. *Si possono moltiplicare i due mem-*

bri di una equazione per uno stesso numero senza cangiare le condizioni che essa impone alle incognite.

Infatti, è evidente che le equazioni

$$A = B,$$
$$mA = mB$$

sono perfettamente equivalenti; perchè ciascuna di esse è conseguenza dell'altra.

OSSERVAZIONE I. Il principio precedente suppone essenzialmente che m sia differente da zero. Dunque quando si saranno moltiplicati i due membri di una equazione per un numero indeterminato, bisognerà, nei ragionamenti che si faranno in seguito, evitare le ipotesi che renderebbero questo numero eguale a zero.

OSSERVAZIONE II. Moltiplicando i due membri di una equazione per il prodotto dei denominatori dei suoi differenti termini, si fanno sparire tutti i denominatori. Si dice allora che si sono mandati via i denominatori.

ESEMPIO. La equazione.

(1) $$2+\frac{1}{x}=x-1+\frac{3}{x+1}$$

diviene, moltiplicando i due membri per $x(x+1)$,

(2) $$2x^2+2x+x+1=x^3-x+3x.$$

Bisogna però osservare che non si potrebbero sostituire l'una all'altra le equazioni (1) e (2), se si avesse $x=o$ ovvero $x=-1$; perchè queste due ipotesi annullano il fattore $x(x+1)$, per il quale si sono moltiplicati i due membri della equazione.

OSSERVAZIONE II*. Se i denominatori dei differenti termini della equazione non sono primi tra loro, analogamente a ciò che abbiamo fatto in Aritmetica per la riduzione delle frazioni allo stesso denominatore, sarà utile di moltiplicarne i due membri per il fattore più

semplice che li fa sparire tutti, il quale evidentemente sarà il minimo multiplo di tutti i denominatori medesimi.

ESEMPIO 1°. Sia la equazione

$$\frac{2x}{9}-\frac{1}{6}=\frac{x}{12}-\frac{1}{4}.$$

Per mandar via i denominatori basterà moltiplicare tutti i termini della equazione per 36, minimo multiplo di 9, 6, 12, 4, e si avrà

$$8x-6=3x-9.$$

ESEMPIO 2°. Si abbia la equazione

$$\frac{x}{4bc}-\frac{1}{6b^2}=\frac{x}{3ac^2}-\frac{1}{2a^2}.$$

Il minimo multiplo sarà $12a^2b^2c^2$, e moltiplicando per esso i due membri della equazione, si avrà

$$3a^2bcx-2a^2c^2=4ab^2x-6b^2c^2.$$

Mostreremo in seguito come si possa trovare il più semplice fattore divisibile per tutti i denominatori, quando sono polinomi. Qualchevolta però la sola abitudine del calcolo serve a farne trovare uno più semplice del prodotto di tutti i denominatori.

Sia, per esempio, la equazione

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x^2-a^2}.$$

x^2-a^2, che è eguale al prodotto di $x+a$ per $x-a$, è divisibile per $x+a$, $x-a$, x^2-a^2, ed è più semplice del prodotto di tutti tre i denominatori. Moltiplicando per esso l'equazione, i denominatori spariscono, e si ha

$$x+a+x-a=1.$$

OSSERVAZIONE III. Poichè si possono moltiplicare i due membri di una equazione per un numero qualunque, si potranno anche dividere: perchè la divisione per m non è altro che la moltiplicazione per $\frac{1}{m}$ Soltanto bisogna che il numero m per il quale si divide non si supponga mai nullo. Quando dunque si saranno divisi i due membri di una equazione per uno stesso numero m, bisognerà astenersi in seguito dalle ipotesi che rendessero questo numero eguale a zero.

ESEMPIO. Alla equazione

$$(x-1)(2x+1)=(x-1)(3+\frac{1}{x})$$

può sostituirsi l'altra

$$2x+1=3+\frac{1}{x},$$

la quale si ottiene dividendo i suoi due membri per $x-1$; ma questa sostituzione non è legittima altro che se x è differente da 1. Infatti, la prima equazione è sodisfatta da $x=1$, mentre la seconda non lo è.

44. Perchè si possano sostituire due equazioni l'una all'altra, bisogna che ciascuna sia una conseguenza dell'altra.

Per esempio, alla equazione

$$A^2=B^2$$

non può sostituirsi

$$A=B,$$

benchè la prima equazione sia una conseguenza della seconda; perchè la seconda non è una conseguenza necessaria della prima; i due quadrati A^2 e B^2 potendo essere eguali senza che siano eguali A e B, poichè per ciò è

sufficiente, secondo nostre convenzioni (23), che si abbia $A = -B$.

Equazioni di primo grado.

45. Quando le incognite non entrano nella equazione elevate a potenze superiori alla prima, nè compariscono in alcun denominatore, nè sotto alcun radicale, nè moltiplicate tra loro, si dice che la equazione è di primo grado.

La forma più generale di una equazione di primo grado è

$$(1) \qquad ax + b = a'x + b';$$

x indicando la incognita, e a, b, a', e b', numeri dati. Infatti, la equazione proposta, se è di primo grado rapporto a x, non conterrà in ciascun membro, altro che dei termini conosciuti che si potranno riunire in un solo, e dei termini di primo grado in x, la somma dei quali evidentemente ha la forma ax, $a'x$. Se, per esempio, si volesse che la equazione (1) rappresentasse

$$5 - 3x = 4x - 2,$$

basterebbe supporvi $a = -3$, $b = 5$, $a' = 4$, $b' = -2$.

Risoluzione delle equazioni di primo grado a una incognita.

46. Riprendiamo la equazione generale

$$ax + b = a'x + b'.$$

Facendo passare (42) il termine b nel secondo membro, e $a'x$ nel primo, abbiamo

$$ax - a'x = b' - b,$$

ossia

$$(a-a')x=b'-b,$$

la quale evidentemente equivale a

$$x=\frac{b'-b}{a-a'}.$$

Questa formula rappresenta un numero positivo o negativo, che sostituito nella equazione (1), e trattato colle regole convenute, renderà il primo membro eguale al secondo.

Esempio. Sia la equazione

$$5+7x=2x+9;$$

la formula precedente dà

$$x=\frac{9-5}{7-2}=\frac{4}{5}.$$

Sia ancora

$$4+3x=7+6x;$$

troveremo

$$x=\frac{7-4}{3-6}=-1.$$

Si verifica facilmente che i valori $x=\frac{4}{5}$, $x=-1$ sodisfanno alle equazioni proposte.

Equazioni che si riducono al primo grado.

47. Una equazione che non è di primo grado, può divenire tale in alcuni casi, per mezzo di convenienti trasformazioni. Ne daremo vari esempi.

1° Sia la equazione (a)

$$\sqrt{4+x}=4-\sqrt{x};$$

inalzando i due membri a quadrato, si ottiene

$$4+x=16-8\sqrt{x}+x;$$

e facendo passare alcuni termini da un membro nell'altro, e sopprimendo quelli che si distruggono,

$$8\sqrt{x}=12,$$

e inalzando a quadrato i due membri,

$$64x=144,$$
$$x=\frac{144}{64}=\frac{9}{4}.$$

Osservazione. Il calcolo precedente prova soltanto che il solo valore di x che può sodisfare alla equazione proposta è $x=\frac{9}{4}$; ma per essere certi che questo valore sodisfa di fatto, bisogna verificarlo con una sostituzione diretta. Infatti, osserviamo, che la equazione

$$4+x=16-8\sqrt{x}+x,$$

sebbene sia una conseguenza della proposta, e debba esser sodisfatta dagli stessi valori di x, pure potrebbe esser sodisfatta senza che lo fosse la proposta, se avessimo

$$\sqrt{4+x}=-(4-\sqrt{x});$$

perchè due numeri eguali, e di segno contrario hanno lo stesso quadrato. Sostituendo a x il suo valore $\frac{9}{4}$, ab-

(a) In questa equazione $\sqrt{4+x}$ e $\sqrt{x}$ indicano numeri *positivi*; per ora lasciamo da parte il doppio valore che può esser loro attribuito.

biamo

$$\sqrt{4+x}=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2},$$

$$\sqrt{x}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2};$$

quindi la proposta diviene

$$\frac{5}{2}=4-\frac{3}{2},$$

che è una identità. Il valore trovato per x sodisfa; ma era indispensabile di verificarlo (44).

2° Sia ancora

$$\frac{a}{1+2x}+\frac{a}{1-2x}=2b.$$

Moltiplichiamo i due membri per il prodotto $(1+2x)$ $(1-2x)$, ossia per $1-4x^2$: si ottiene

$$a(1-2x)+a(1+2x)=2b(1-4x^2),$$

ed eseguendo le moltiplicazioni e sopprimendo i termini che si distruggono,

$$2a=2b-8bx^2,$$

la quale, prendendo x^2 per incognita, è una equazione di primo grado, e dà

$$x^2=\frac{2b-2a}{8b}=\frac{b-a}{4b}.$$

Risoluzione di alcuni problemi.

48. Daremo fin d'ora alcuni esempi della utilità delle equazioni nella risoluzione dei problemi.

Problema 1°. *Trovare lo sconto d'un biglietto*

di 1500 fr., *pagabile tra cinque mesi, valutando il frutto al* 4 *per* 100.

Indichiamo con x lo sconto, cioè quel che si ritiene nel pagare il biglietto. Si darà al portatore $1500-x$, e questa somma dovrà esser tale, che posta a frutto per cinque mesi, produca un frutto eguale ad x; ora 100 fr. in un anno rendendo 4 fr., in cinque mesi renderanno $4\times\frac{5}{12}$, cioè $\frac{5}{3}$ di franco.

Il frutto d'un franco, nello stesso tempo, è dunque $\frac{5}{300}$, e quello di $1500-x$, è

$$\frac{5}{300}(1500-x),$$

quindi si dovrà avere

$$\frac{5}{300}(1500-x)=x,$$

e mandando via il denominatore

$$5\times1500-5x=300x,$$

equazione di primo grado, dalla quale si ricava

$$x=\frac{5\times1500}{305}.$$

PROBLEMA 2°. *Si hanno due verghe d'argento, i titoli delle quali sono* 0,775 *e* 0,940; *qual peso bisogna prendere di ciascuna di esse, per formare* 25 gr. *di lega, il titolo della quale sia* 0,900?

Sia x il numero dei grammi che si debbono prendere dalla prima verga, e per conseguenza $25-x$, quelli che si devono prendere dalla seconda.

Il peso dell'argento contenuto in x grammi della prima verga è $x\times0{,}775$.

La quantità di argento contenuta in $25-x$ grammi della seconda verga è $(25-x)\times0{,}940$.

Dunque la quantità totale dell'argento contenuta nella lega è

$$x \times 0{,}775 + (25 - x) \times 0{,}940.$$

Poichè il titolo della lega è 0,900, tutta la quantità di argento contenuta in 25 gr., deve essere eguale a $25 \times 0{,}900$, e quindi si deve avere

$$x \times 0{,}775 + (25 - x) \times 0{,}940 = 25 \times 0{,}900,$$

equazione di primo grado, da cui si dedurrà il valore di x.

PROBLEMA 3°. *La distanza da Parigi a Rouen è di 137 kilometri. Il carbone costa a Parigi 4 fr.,25, ogni cento kilogrammi, e a Rouen 4 fr.,75; essendo le spese di trasporto di 0 fr.,09 per ogni tonnellata e per ogni kilometro, quale è il punto della strada, per il quale vi è lo stesso vantaggio a far venire il carbone sì dall' una che dall' altra città?*

Sia x la distanza del punto cercato da Parigi, e quindi $137 - x$, la distanza da Rouen.

Una tonnellata di carbone comprata a Parigi, costa 42 fr.,50.

Le spese di trasporto alla distanza x, sono $x \times 0{,}09$.

Il prezzo totale di una tonnellata comprata a Parigi sarà dunque

$$42{,}50 + x \times 0{,}09.$$

Una tonnellata comprata a Rouen e transportata alla distanza $137 - x$ costerà

$$47{,}50 + (137 - x)0{,}09;$$

avremo dunque la equazione

$$42{,}50 + x \times 0{,}09 = 47{,}50 + (137 - x)0{,}09,$$

dalla quale si ricaverà facilmente il valore di x.

Osservazioni sul modo di porre i problemi in equazione.

49. Porre un problema in equazione, non è altro che esprimere con una o più equazioni le condizioni comprese nell'enunciato. È impossibile di dare una regola per questo, che sia compiutamente generale.

Esaminando con cura l'enunciato di un problema, si vedrà quasi sempre, che si tratta di rendere certe quantità eguali tra loro. Dopo avere riconosciuto quali sono queste quantità, si cercheranno le formule che ne esprimono il valore, e eguagliandole tra loro, si otterranno le equazioni richieste. Riprendiamo, per esempio, i tre problemi trattati di sopra.

Problema 1°. Trovare lo sconto di 1500 fr. pagabili tra cinque mesi, vuol dire trovare una somma che posta a frutto per cinque mesi, sommata col frutto reso in questo tempo, divenga *eguale* a 1500 fr.

Problema 2°. Fare una lega di argento a 0,775 con dell'argento a 0.940, in modo da formare 25 gr. di lega a 0,900, vuol dire fare in modo che tutto l'argento contenuto nei 25 gr. di lega, sia *eguale* a $0{,}900 \times 25$.

Problema 3°. Bisogna fare in modo che il prezzo di una tonnellata di carbone trasportata da Parigi al punto cercato, sia *eguale* al prezzo di una tonnellata trasportata da Rouen allo stesso punto.

Osservazione. In quasi tutti i problemi numerici, porre in equazione un problema non è altro, per così dire, che tradurre in linguaggio algebrico, l'enunciato in lingua italiana. Può accadere che sembri di non potere immediatamente tradurre l'enunciato in formula, ma ponendo attenzione al senso più che alle parole, non si troverà quasi mai difficoltà. Il lettore potrà esercitarsi sui problemi indicati qui appresso.

Esercizi.

1°. Due vasi di capacità v e v' contengono ciascuno un mescuglio di acqua e di vino, nel rapporto di m ad n per il primo, di m' a n' per il secondo. Qual capacità si deve dare a due altri vasi eguali tra loro, perchè riempiendoli contemporaneamente uno in v, l'altro in v', e versando in ciascuno di essi ciò che è stato preso nell'altro, la proporzione dell'acqua e del vino divenga la stessa in ambedue i vasi? Dimostrare *a priori* che il risultato deve essere indipendente da m, n, m' e n'.

2°. Adottando le regole indicate *Cap. I*, esercizio 7°, per la determinazione del prezzo dell'acquavite, trovare quanta acquavite ad a fr. il litro bisogna mescolare con acquavite a b fr. il litro, per ottenere un litro di acquavite a c fr.

3°. Le lancette delle ore, dei minuti e dei secondi, sono sulla cifra 12 della mostra di un orologio; dopo quanto tempo la lancetta dei secondi dividerà in due parti eguali l'angolo formato dalle altre due?

4°. Tre mobili percorrono una stessa linea retta con moto uniforme, colle velocità v, v' e v''; si trovano ora alle distanze a, a' e a'' da un punto O di questa retta, dal quale si allontanano tutti tre: dopo quanto tempo il primo sarà ai tre quinti della distanza che separa gli altri due?

5°. Due persone A e B, hanno fatto una scommessa di 12 fr.; se A vince, diviene tre volte più ricco di B; se perde, sarà soltanto due volte più ricco di B. Quanto è ora il denaro di ciascuno?

6°. Un rettangolo, la larghezza del quale è doppia dell'altezza, è tale che se ogni lato è aumentato di un metro, la sua superficie è aumentata di nove metri quadrati. Quale è la lunghezza dei suoi lati?

7°. Trovare tre termini di una progressione geometrica che superino d'una stessa quantità i numeri 3, 5, e 8.

8°. Dato un parallelepipedo rettangolo, determinare il lato di un cubo in modo, che le superficie dei due solidi siano nel medesimo rapporto che i loro volumi.

✝9°. Trovare una proporzione, i quattro termini della quale superino di una stessa quantità quattro numeri dati a, b, c e d.

10°. Risolvere $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1.$

11°. » $\sqrt{a+x}-\sqrt{\frac{a}{a+x}}=\sqrt{2a+x}.$

12°. » $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}.$

13°. » $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt{b}.$

14°. » $(2+x)^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}=4(2+x)^{-\frac{1}{2}}.$

15°. » $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\sqrt{\frac{1}{a^2x^2}+\frac{1}{x^4}}}.$

16°. » $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$

17°. » $x=\sqrt{x^2+2a\sqrt{a^2+x^2}}-a.$

18°. » $2x+2\sqrt{a^2+x^2}=\frac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}.$

19°. » $\frac{(a+x)^{\frac{1}{n}}}{a}+\frac{(a+x)^{\frac{1}{n}}}{x}=\frac{x^{\frac{1}{n}}}{c}.$

✗20°. n pietre sono disposte in linea retta, a dieci metri di distanza una dall'altra: determinare su questa retta la posizione di un punto X, in modo che per trasportare successivamente ogni pietra al punto X, si debba fare un cammino doppio di quello che si deve fare per trasportarle tutte

nel posto occupato dalla prima di esse. Si supporrà, in ambedue i casi, che si parta dalla prima pietra.

+ 21°. Sono necessari un numero di uomini eguale ad a o un numero di donne eguale a b, per fare in n giorni un lavoro rappresentato da m; quante donne bisogna aggiungere ad $a-p$ uomini, per fare in $n-p$ giorni, un lavoro rappresentato da $m-p$?

+ 22°. Due orologi battono l'ora insieme, e s'intendono in tutto diciannove colpi. Dedurne che ora è, sapendo che uno va indietro due secondi rispetto all'altro, e che i colpi del primo si succedono coll'intervallo di tre secondi, e quelli del secondo coll'intervallo di quattro, e ammettendo che si senta un sol colpo quando i due orologi battono nel medesimo secondo.

CAPITOLO V.

RISOLUZIONE DI UN NUMERO QUALUNQUE DI EQUAZIONI DI PRIMO GRADO TRA UN NUMERO EGUALE D'INCOGNITE.

50. Si può, in generale, determinare il valore d'un numero qualunque d'incognite, quando sono date altrettante equazioni di primo grado tra le medesime. Questo è ciò che mostreremo nel presente capitolo. Ma avanti stabiliremo alcune proposizioni sui sistemi di più equazioni.

Un sistema di equazioni, è l'insieme di più equazioni che devono essere sodisfatte contemporaneamente. Se ciascuna equazione contenesse una sola delle incognite, si risolverebbero tutte separatamente, e si avrebbero tanti problemi distinti quante fossero le equazioni da risolversi. Ma quando le incognite entrano contemporaneamente in più equazioni, la questione diviene più difficile.

51. Si dice che due sistemi di equazioni sono equivalenti, quando i valori delle incognite, che sodisfano l'uno e l'altro, sono assolutamente i medesimi; o, con altre parole, quando le equazioni di ciascuno dei sistemi sono una conseguenza di quelle dell'altro.

Quando due sistemi sono equivalenti si possono sostituire l'uno all'altro.

52. Teorema 1° *Dato un sistema di equazioni, si può sostituire a una qualunque di esse l'equazione ottenuta sommando le equazioni proposte, membro a membro.*

Così, il sistema di equazioni

$$A = A',$$
$$B = B',$$
$$C = C',$$

è equivalente ad

$$A + B + C = A' + B' + C',$$
$$B = B',$$
$$C = C'.$$

Infatti, è evidente che il secondo sistema è una conseguenza del primo. Reciprocamente, il primo è una conseguenza del secondo. perchè B e C sono rispettivamente eguali a B' e C', $B+C$ è eguale a $B'+C'$, e $B+C$ aumentato di A non può essere eguale a $B'+C'$ aumentato di A', se A' non è eguale ad A.

La dimostrazione è indipendente dal numero delle equazioni. È evidente poi che invece di sommare membro a membro tutte le equazioni che compongono un sistema, si può anche sommarne una parte soltanto, e che prima di sommare le equazioni si possono moltiplicare per numeri qualunque; con che non si alterano (43) le condizioni imposte alle incognite.

53. TEOREMA 2°. *Quando una delle equazioni d'un sistema è risoluta rapporto a una incognita, si può sostituire a questa incognita il suo valore, nelle altre equazioni, e ridurre così il sistema proposto a un altro che abbia una incognita e una equazione di meno.*

Così il sistema

$$x = A,$$
$$B = B',$$
$$C = C',$$
$$D = D',$$

in cui B, B', C, C', D, D' contengono in un modo qualunque le quantità incognite, e A può contenere tutte

le incognite tranne x, è equivalente a un altro composto della equazione $x = A$, e di altre tre ottenute sostituendo a x il valore A, in $B = B'$, $C = C'$, $D = D'$. Infatti, poichè la equazione $x = A$ fa parte dei due sistemi, qualunque dei due sia sodisfatto, si potrà sostituire A ad x, o x ad A, nelle equazioni rimanenti, e passare così dal primo sistema al secondo, o tornare dal secondo al primo, in guisa che essendo ciascuno una conseguenza dell'altro, i due sistemi sono equivalenti tra loro.

Osservazione. Quando, nelle equazioni $B = B'$; $C = C'$, $D = D'$, si sostituisce ad x il suo valore A, questa incognita sparisce dalle equazioni. Si dice allora che è *eliminata:* in generale *eliminare* una quantità tra due o più equazioni, vuol dire combinare queste equazioni in modo che la quantità considerata sparisca dal risultato.

Risoluzione di due equazioni di primo grado a due incognite.

54. Se x ed y rappresentano le due incognite, le equazioni non potranno contenere che tre specie di termini:

Termini di primo grado in x,
Termini di primo grado in y,
Termini conosciuti.

Si possono far passare, nel primo membro, tutti i termini in x e y e riunire, coll' addizione dei coefficienti, quelli che contengono la stessa incognita. Facendo passare egualmente nel secondo membro tutti i termini cogniti, e riunendoli in un solo, queste equazioni prenderanno la forma

(1) $$ax + by = c,$$
(2) $$a'x + b'y = c',$$

a, b, c, a', b', c', rappresentando numeri conosciuti. Si può sostituire alla equazione (1)

$$x=\frac{c-by}{a},$$

e il sistema diviene

$$(3) \qquad x=\frac{c-by}{a},$$

$$(2) \qquad a'x+b'y=c';$$

ma sotto questa forma (53) equivale al seguente

$$(3) \qquad x=\frac{c-by}{a},$$

$$(4) \qquad \frac{a'(c-by)}{a}+b'y=c'.$$

La seconda di queste due equazioni contiene la sola incognita y, rapporto alla quale si può risolvere; e così determinata y, la prima farà conoscere x.

Moltiplicando i due membri della equazione (4) per a, essa diviene

$$a'(c-by)+ab'y=ac',$$

o anche

$$(ab'-a'b)y=ac'-a'c,$$

oppure

$$(5) \qquad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$$

Sostituendo questo valore di y, la equazione (3) diviene

$$x=\frac{c-b\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}}{a}=\frac{cab'-ca'b-bac'+ba'c}{a(ab'-a'b)},$$

ovvero

(6) $$x=\frac{cab'-bac'}{a(ab'-a'b)}=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}.$$

Le formole (5) e (6) facendo conoscere i valori di x e di y, le equazioni proposte sono risolute.

55. Osservazione I. Le equazioni

$$ax+by=c,$$
$$a'x+b'y=c',$$

hanno per soluzioni

$$x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b},$$
$$y=\frac{c'a-a'c}{ab'-a'b}.$$

Si riterranno facilmente queste formule per mezzo delle osservazioni seguenti.

I valori delle due incognite hanno per denominatore comune $ab'-a'b$.

Per formare il numeratore del valore di ciascuna incognita, bisogna sostituire, nella espressione $ab'-a'b$, a ciascuno dei coefficienti che nelle equazioni moltiplicano questa incognita, il termine tutto cognito della equazione corrispondente (ad a e ad a', c e c', per il valore di x, a b ed a b', c e c', per il valore di y).

Osservazione II. Le formule precedenti danno, in generale, per ogni incognita un valore unico e determinato. In alcuni casi particolari che saranno esaminati in seguito, queste formule possono divenire illusorie. Le soluzioni cessano allora di esistere, o divengono indeterminate.

56. Vi sono altri metodi spesso usati per la risoluzione di due equazioni a due incognite: benchè non dif-

feriscano, in sostanza, da quello sopra spiegato, nondimeno crediamo di non potere tralasciare d'indicarli.

1° Siano le equazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} ax+by=c, \\ a'x+b'y=c'; \end{cases}$$

moltiplicando i due membri della prima equazione per a', e i due membri della seconda per $-a$, esse divengono

$$(2)\qquad \begin{cases} aa'x+ba'y=ca', \\ -a'ax-b'ay=-c'a. \end{cases}$$

Sommandole membro a membro, si ottiene la equazione

$$(3)\qquad (ba'-ab')y=ca'-c'a,$$

la quale può (52) sostituirsi a una di esse, e dà

$$y=\frac{ca'-c'a}{ba'-b'a}.$$

Conosciuta y, una delle date equazioni farà conoscere x. Si può anche cercar direttamente il valore di questa incognita, eliminando y come abbiamo eliminato x.

È evidente che la riuscita del metodo dipende dall'avere ottenuto le equazioni (2), nelle quali la incognita x ha i coefficienti eguali e di segno contrario, ciò che permette di eliminarla coll'*addizione*. È bastato per questo moltiplicare i due membri delle equazioni proposte per i fattori a' e $-a$; in alcuni casi si può adottare un moltiplicatore più semplice, come nella riduzione delle frazioni allo stesso denominatore, che è una operazione analoga. (Vedi *Aritmetica*). Supponiamo che i coefficienti di x abbiano un divisore comune μ, e che le equazioni proposte siano

$$A\mu x+By=C,$$
$$A'\mu x+B'y=C';$$

moltiplicando la prima equazione per A' e la seconda per $-A$, esse diverranno

$$AA'\mu x + BA'y = CA',$$
$$-AA'\mu x - B'Ay = -C'A,$$

e basterà sommarle per eliminare x.

2° Si può ancora risolvere il sistema

$$(1) \qquad \begin{aligned} ax + by &= c, \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}$$

nel modo seguente: si deduce dalle equazioni proposte

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{c - by}{a}, \\ x &= \frac{c' - b'y}{a'}, \end{aligned}$$

ed eguagliando i valori di x,

$$\frac{c - by}{a} = \frac{c' - b'y}{a'},$$

equazione a una sola incognita, che farà conoscere y. Conosciuta y, una o l'altra delle equazioni (2) permette di determinare x.

Risoluzione di un numero qualunque di equazioni di primo grado.

57. Per risolvere un numero qualunque di equazioni di primo grado tra un numero eguale d' incognite, si può dedurre da una di esse il valore di una incognita, e sostituirla (53) in tutte le altre che conterranno allora una incognita di meno. La risoluzione di n equazioni a n incognite si ridurrà così a quella di $n-1$ equazioni ad $n-1$ incognite; queste si ridurranno egualmente a un

sistema di $n-2$ equazioni a $n-2$ incognite, e continuando così, saremo condotti a una equazione con una sola incognita.

Il processo indicato è assai semplice, perchè quanto abbiamo detto basti per intenderlo e farne uso.

58. Si risolvono le equazioni di primo grado anche con un altro metodo, che spesso riesce più comodo.

Siano n equazioni di primo grado a n incognite

$$(1)\qquad \begin{aligned} &ax+by+cz+\cdots\cdots\cdots=k,\\ &a_1x+b_1y+c_1z+\cdots\cdots\cdots=k_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{n-1}x+b_{n-1}y+c_{n-1}z+\cdots=k_{n-1}.\end{aligned}$$

Sommiamo queste equazioni, dopo averle moltiplicate, cominciando dalla seconda, per dei numeri indeterminati $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$; otterremo

$$(2)\ x(a+\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_{n-1}a_{n-1})+y(b+\lambda_1b_1+\cdots+\lambda_{n-1}b_{n-1})+ \\ +z(c+\lambda_1c_1+\cdots+\lambda_{n-1}c_{n-1})+\cdots=k+k_1\lambda_1+\cdots+k_{n-1}\lambda_{n-1},$$

e questa nuova equazione può sostituirsi (52) a una qualunque delle proposte, qualunque siano i numeri λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$; ora noi possiamo determinare questi numeri in modo che le equazioni

$$(3)\qquad \begin{aligned} &b+b_1\lambda_1+\cdots+b_{n-1}\lambda_{n-1}=o,\\ &c+c_1\lambda_1+\cdots+c_{n-1}\lambda_{n-1}=o,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

siano sodisfatte, e basterà per questo risolvere $n-1$ equazioni a $n-1$ incognite. Ma allora la equazione (2) non conterrà più altro che la incognita x, e permetterà di determinarne il valore; conosciuta x, il sistema non conterrà più altro che $n-1$ incognite.

Col metodo che abbiamo indicato si possono risol-

vere n equazioni a n incognite, purchè si sappia risolvere un sistema che contenga una incognita di meno. Quindi, poichè sappiamo risolvere due equazioni a due incognite, potremo risolvere un sistema di tre equazioni a tre incognite: e perciò anche un sistema di quattro equazioni con quattro incognite, e così di seguito. Otterremo sempre, qualunque sia il numero delle incognite, una formula che dà il valore di ciascuna delle medesime espresso per mezzo dei coefficienti. In alcuni casi particolari, queste formule potranno essere illusorie, e allora le equazioni saranno impossibili o indeterminate; ma qui non entreremo in questa discussione.

59. Si può anche risolvere il sistema proposto, procedendo per ogni incognita come abbiamo fatto per x, e ottenerle così una indipendentemente dall'altra. Poichè il ragionamento precedente dimostra che, in generale, esiste sempre un sistema di valori che sodisfa alle n equazioni proposte, saremo certi, che le soluzioni trovate in questo modo, e che evidentemente sono le uniche possibili, vi sodisfaranno effettivamente.

60. Applicazione. Si debba risolvere il sistema

$$(1)\quad \begin{cases} ax+by+cz=k, \\ a'x+b'y+c'z=k', \\ a''x+b''y+c''z=k''. \end{cases}$$

Sommiamo queste tre equazioni dopo avere moltiplicata la seconda e la terza per le indeterminate λ' e λ''; otterremo

$$x(a+a'\lambda'+a''\lambda'')+y(b+b'\lambda'+b''\lambda'')+z(c+c'\lambda'+c''\lambda'') \\ =k+k'\lambda'+k''\lambda''.$$

Ponendo

$$(2)\quad \begin{aligned} b+b'\lambda'+b''\lambda''=o, \\ c+c'\lambda'+c''\lambda''=o, \end{aligned}$$

avremo

$$x=\frac{k+k'\lambda'+k''\lambda''}{a+a'\lambda'+a''\lambda''}.$$

Sostituendo i valori di λ' e di λ'' ricavati dalle due equazioni (2) a due incognite,

$$\lambda'=\frac{b''c-bc''}{b'c''-b''c'},\qquad \lambda''=\frac{c'b-cb'}{b'c''-b''c'},$$

e moltiplicando i due termini della frazione per $b'c''-b''c'$, otterremo

$$x=\frac{kb'c''-kb''c'+k'b''c-k'bc''+k''c'b-k''cb'}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''c'b-a''cb'}.$$

Si troverà egualmente

$$y=\frac{ak'c''-ak''c'+a'k''c-a'kc''+a''c'k-a''ck'}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''c'b-a''cb'},$$

$$z=\frac{ab'k''-ab''k'+a'b''k-a'bk''+a''k'b-a''kb'}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''c'b-a''b'c}.$$

Si hanno formule analoghe, nel caso di un numero qualunque di equazioni; ma per ora non ne daremo nè la dimostrazione generale nè la discussione.

61*. Osservazione I. Se invece di moltiplicare le equazioni (1) per 1, λ', λ'', si fossero moltiplicate per m, $m\lambda'$, $m\lambda''$, essendo m un numero qualunque, si sarebbe ottenuto, sommandole,

$$x(ma+m\lambda'a'+m\lambda''a'')+y(mb+m\lambda'b'+m\lambda''b'')+z(mc+m\lambda'c'+m\lambda''c'')$$
$$=mk+m\lambda'k'+m\lambda''k'';$$

e prendendo per λ' e λ'' i valori che sodisfanno alle (2), sarebbero egualmente spariti i termini in y e z, e avremmo ottenuta una equazione colla sola incognita x.

Per avere i moltiplicatori interi, basterà prendere

m eguale al denominatore comune dei valori di λ' e λ''. Così avremo

$$m = b'c'' - b''c',\ m\lambda' = b''c - bc'',\ m\lambda'' = bc' - b'c$$

Se questi tre moltiplicatori avranno un fattore comune q, si potrà sopprimere, perchè così non si fa altro che prendere per m il valore precedente diviso per q, e si rende il calcolo più semplice.

Osserviamo che i tre fattori che servono ad eliminare x, sono construiti nel modo seguente: il moltiplicatore della 1ª. equazione è formato dalla differenza dei prodotti in croce dei coefficienti di y e di z nella 2ª e nella 3ª equazione; quello della 2ª è formato egualmente con i coefficienti di y e di z, nella 3ª e nella 1ª; quello della 3ª con quelli della 1ª e della 2ª; i tre fattori che servono ad eliminare y si ottengono, mutando in questi i coefficienti di y in quelli di z, quelli di z in quelli di x; e per i fattori relativi a z, si mutano nei precedenti i coefficienti di z in quelli di x, quelli di x in quelli di y.

Moltiplicando le tre equazioni per i rispettivi fattori che servono ad eliminare due incognite e sommandole, si ottiene il valore di una di queste, e in modo analogo si hanno poi successivamente quelli delle altre due.

ESEMPIO. Siano le equazioni

$$\begin{aligned} 4x - 8y + 6z &= 1, \\ 2x - 12y - 4z &= 3, \\ 6x + 4y + 8z &= 5. \end{aligned}$$

Si avrà;

per la 1ª, $(-12)\times 8 - 4\times(-4) = -80$
per la 2ª, $4\times 6 - 8\times(-8) = 88$
per la 3ª, $(-8)\times(-4) - 6\times(-12) = 104$.

Dividendo i tre numeri 80, 88, 104 per il loro massimo

comune divisore 8, si hanno i tre moltiplicatori -10, 11, 13. Eseguendo le moltiplicazioni, si ha

$$\begin{aligned} -40x+80y-60z&=-10,\\ 22x-132y-44z&=33,\\ 78x+52y+104z&=65: \end{aligned}$$

sommando, si ottiene

$$60x=88;\ \text{onde}\ x=\frac{88}{60}=\frac{22}{15}.$$

Per ricavare il valore di y, si ha

per la 1ª $2\times8-6\times(-4)=40$
per la 2ª $6\times6-4\times8=4$
per la 3ª $4\times(-4)-2\times6=-28$.

Il massimo comune divisore è 4; quindi i moltiplicatori sono 10, 1, -7. Effettuando le moltiplicazioni,

$$\begin{aligned} 40x-80y+60z&=10,\\ 2x-12y-4z&=3,\\ -42x-28y-56z&=-35. \end{aligned}$$

Sommando,

$$-120y=-22,\ y=\frac{22}{120}=\frac{11}{60}.$$

Egualmente operando per la z, si trova

$$z=-\frac{17}{30}.$$

62*. Osservazione II. Le formule che danno i valori delle tre incognite hanno lo stesso denominatore, e i numeratori si deducono dal denominatore, ponendo, in luogo dei coefficienti della incognita da determinarsi, i termini tutti cogniti, cioè, ponendo k, k', k'' invece di a, a', a'', per il valore di x, invece di b, b', b'', per quello di y, invece di c, c', c'', per quello di z.

Per construire il denominatore comune, si può tenere il modo seguente: si moltiplicano respettivamente i coefficienti che hanno una medesima incognita nelle tre equazioni, per i moltiplicatori che servono ad eliminare le altre due, e si sommano i resultati. Secondo che si prenderanno i coefficienti di x, di y, o di z, lo avremo sotto una di queste tre forme,

$$a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c),$$
$$b(c'a''-c''a')+b'(c''a-ca'')+b''(ca'-c'a),$$
$$c(a'b''-a''b')+c'(a''b-ab'')+c''(ab'-a'b),$$

che sono, evidentemente, espressioni identiche con quella data di sopra (60).

Esercizi.

1°. Trovare due numeri che stiano tra loro come 2 a 3, e tali che aggiungendo a ciascuno 4, le somme stiano come 4 a 5.

2°. Trovare due numeri che stiano tra loro ::3:4, e il prodotto dei quali sia eguale a 12 volte la somma.

3°. Trovare due numeri, dei quali la differenza, la somma e il prodotto stiano tra loro come i numeri 2, 3 e 5.

4°. Trovare tre numeri in progressione aritmetica tali, che il 1° stia al 3° ::5:9, e che la somma di tutti tre sia eguale a 63.

5°. Risolvere le equazioni

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=1.$$

Dedurre dalle medesime x, y, z, e $x^2+y^2+z^2$.

6°. Data la serie

$$a+b,\ aq+bq_1,\ aq^2+bq_1^2,\ aq^3+bq_1^3,\ aq^4+bq_1^4,\ \ldots\ldots,$$

trovare due numeri x e y tali, che ogni termine di questa serie possa ottenersi, moltiplicando il precedente per x, e l'antiprecedente per y.

7°. Data la serie

$$a+b+c,\ aq+bq_1+cq_2,\ aq^2+bq_1^2+cq_2^2,\ aq^3+bq_1^3+cq_2^3,\ \ldots\ldots;$$

trovare tre numeri x, y, z, tali che ogni termine di questa serie si ottenga, moltiplicando il precedente per x, l'antiprecedente per y, e quello che precede di tre posti per z.

8°. Risolvere le equazioni

$$\begin{aligned}
a^4+a^3x+a^2y+az+u &= o,\\
b^4+b^3x+b^2y+bz+u &= o,\\
c^4+c^3x+c^2y+cz+u &= o,\\
d^4+d^3x+d^2y+dz+u &= o.
\end{aligned}$$

9°. Risolvere le equazioni

$$\begin{aligned}
1 &= x+y+z+u+v+w+t,\\
0 &= x+ay+bz+cu+dv+ew+ft,\\
0 &= x+a^2y+b^2z+c^2u+d^2v+e^2w+f^2t,\\
0 &= x+a^3y+b^3z+c^3u+d^3v+e^3w+f^3t,\\
0 &= x+a^4y+b^4z+c^4u+d^4v+e^4w+f^4t,\\
0 &= x+a^5y+b^5z+c^5u+d^5v+e^5w+f^5t,\\
0 &= x+a^6y+b^6z+c^6u+d^6v+e^6w+f^6t.
\end{aligned}$$

10°. Ponendo

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= \alpha t+\beta u,\\ y &= \alpha' t+\beta' u \end{aligned}$$

nelle equazioni

$$(2)\qquad \begin{aligned} ax+by &= c,\\ a'x+b'y &= c', \end{aligned}$$

si ottengono due equazioni tra t ed u; verificare che il denominatore dei valori di t e u, che se ne deducono, è il prodotto dei denominatori, che si trovano, risolvendo le equazioni (1) rapporto a t ed u, e le (2) rapporto a x e y.

11°. Fare la stessa verificazione per i sistemi di equazioni

$$(1)\quad \begin{cases} x = \alpha t + \beta u + \gamma v, \\ y = \alpha' t + \beta' u + \gamma' v, \\ z = \alpha'' t + \beta'' u + \gamma'' v. \end{cases}$$

e

$$(2)\quad \begin{cases} ax + by + cz = d, \\ a'x + b'y + c'z = d', \\ a''x + b''y + c''z = d''. \end{cases}$$

12°. Risolvere le equazioni

$$ax^3 = by^3 = cz^3,$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{d};$$

e calcolare $ax^2 + by^2 + cz^2$.

13°. Eliminare a, b, c tra le equazioni

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1,$$
$$a^n + b^n + c^n = d^n,$$
$$\frac{x^m}{a^{m+n}} = \frac{y^m}{b^{m+n}} = \frac{z^m}{c^{m+n}}.$$

+14°. Un treno, la velocità del quale è v, parte dopo un treno, di cui la velocità è v', e il ritardo è calcolato in modo che debbano arrivare contemporaneamente al punto destinato. Il primo treno è costretto a diminuire la velocità della metà, dopo avere percorsi i due terzi del tragitto, e i treni s'incontrano a leghe prima della fine del viaggio. Trovare la lunghezza totale del viaggio.

+15° Per fare un certo lavoro, A impiega m volte più tempo che B e C riuniti; B, n volte più tempo che A e C; e C, p volte più tempo che A e B. Trovare una relazione tra m, n e p.

16°. Qual relazione deve esistere tra a, b e c, perchè siano i termini di posto p, q ed r, in una stessa progressione per differenza o per quoziente?

CAPITOLO VI.

Pag 173

DISCUSSIONE DELLE FORMULE TROVATE NEI DUE CAPITOLI PRECEDENTI.

—

Discussione della formula di risoluzione di una equazione di primo grado a una incognita.

63. Abbiamo trovato (46) per soluzione della equazione

(1) $$ax+b=a'x+b',$$

(2) $$x=\frac{b'-b}{a-a'}.$$

Il solo caso da esaminarsi è quello in cui $a-a'$ è eguale a zero.

1° Se $a-a'$ è nullo, senza che sia nullo anche $b'-b$, la formula (2) dà

$$x=\frac{b'-b}{o},$$

che non significa niente. Ma è facile accorgersi che, in questo caso, la equazione proposta è impossibile, perchè, essendo $a'=a$, essa diviene

$$ax+b=ax+b',$$

che non può mai verificarsi se b è differente da b'.

2° Supponiamo ora che si abbia contemporaneamente $a=a'$, $b=b'$; la formula (2) darà

$$x=\frac{0}{0},$$

che non vuol dire nulla; ma è facile a vedersi che, in questo caso, la equazione (1) è verificata, qualunque sia x, perchè diviene:

$$ax + b = ax + b.$$

64. Osservazione I. Per ciò che abbiamo detto, quando la formula di risoluzione di una equazione a una incognita dà, per valore di questa incognita, una espressione della forma $\frac{m}{o}$, bisogna concludere che l'equazione è impossibile; ma non è sempre così del problema che vi ha condotto: si può affermare soltanto, che la quantità presa per incognita cessa allora di esistere. Se, per esempio, si è presa per incognita la distanza a cui s'intersecano due rette date, e si trova un valore della forma $\frac{m}{o}$, si concluderà che non esiste distanza a cui le due rette s'incontrino, e che per conseguenza sono parallele.

65. Osservazione II. Quando il denominatore d'una frazione diminuisce, la frazione aumenta, e può aumentare senza limite, se il denominatore diminuisce indefinitamente. Per ciò si dice qualche volta, che divenendo nullo il denominatore, la frazione diviene *infinita*, e si scrive che l'equazione proposta ha per soluzione $x = \infty$. Questa è locuzione scorretta: la frazione, di cui il denominatore è nullo, non rappresenta niente. Se i dati di un problema variano in tal modo che il denominatore del valore della incognita tenda verso zero, l'incognita stessa aumenta indefinitamente; ma quando il denominatore è divenuto nullo, la soluzione non esiste più, e la equazione è impossibile.

pag 175

Discussione delle formule di risoluzione di due equazioni a due incognite.

66. Le formule trovate per la risoluzione di due equazioni di primo grado,

$$(1)\qquad ax+by=c,$$
$$(2)\qquad a'x+b'y=c',$$

danno, in generale, per ciascuna incognita un solo valore positivo o negativo; ma in certi casi che noi esamineremo, questi valori divengono illusori.

Le formule di risoluzione sono

$$(3)\qquad x=\frac{cb'-bc'}{ab'-a'b},$$
$$(4)\qquad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-a'b}.$$

Se $ab'-a'b$ non è nullo, esse non offrono alcuna difficoltà; esamineremo perciò soltanto il caso, nel quale sia

$$ab'-a'b=o,$$

e lo divideremo in due altri.

67. 1°. Supponiamo che $ab'-a'b$ sia nullo, senza che siano nulli i numeratori delle frazioni (3) e (4). I valori di x e di y prendono allora la forma priva di significato, $\frac{m}{o}$, $\frac{n}{o}$; ma è facile a vedersi che, in questo caso, l'equazioni proposte sono incompatibili. Infatti, si ha

$$ab'=a'b,$$

o

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'};$$

e, indicando con r il valore comune di questi due rapporti, si rileva

$$a = ra',$$
$$b = rb';$$

in conseguenza l'equazioni proposte divengono

$$ra'x + rb'y = c,$$
$$a'x + b'y = c'.$$

Ora, il primo membro della prima essendo eguale al prodotto di r per il primo membro della seconda, le stesse relazioni devono esistere tra i secondi membri, e quindi vi è impossibilità, se non abbiamo ancora

$$c = rc',$$

cioè, sostituendo a r i due suoi valori $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, se non si ha

$$c = \frac{ac'}{a'}, \qquad c = \frac{bc'}{b'},$$

ovvero

$$ac' = ca', \qquad cb' = bc'.$$

Ma queste ultime eguaglianze esprimono, contro il supposto, che i numeratori dei valori di x e di y sono eguali a zero, esse non sono dunque sodisfatte, e le equazioni sono incompatibili.

68. 2°. Se il numeratore di uno dei valori di x e di y, si annulla nello stesso tempo che $ab' - a'b$; si annulla egualmente anche l'altro numeratore.

Se abbiamo, infatti,

$$ab' - a'b = o,$$
$$ac' - ca' = o.$$

queste equazioni che possono porsi sotto la forma

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'},$$
$$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'},$$

danno, evidentemente,

$$\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'},$$

cioè

$$bc'=b'c.$$

Quando esistono queste relazioni, i valori di ambedue le incognite si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$. Indichiamo con r il valore comune dei tre rapporti $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, $\frac{c}{c'}$, avremo

$$a=ra',\quad b=rb',\quad c=rc',$$

e le equazioni proposte potranno essere scritte così:

$$ra'x+rb'y=rc',$$
$$a'x+b'y=c'.$$

La prima non è altro che la seconda, i cui due membri sono stati moltiplicati per r, e perciò abbiamo realmente una sola equazione tra le due incognite x e y, e per conseguenza si può scegliere una di esse arbitrariamente, e determinare l'altra, risolvendo una equazione a una sola incognita.

69. Ricapitolando; quando le formule di risoluzione danno per le incognite espressioni della forma $\frac{m}{0}$, le equazioni sono incompatibili, e quando le danno della forma $\frac{0}{0}$, le due equazioni rientrano una nell'altra.

La osservazione fatta (65) si applica alle equazioni a due incognite. Quando i valori delle incognite si presentano sotto la forma $\frac{m}{0}$, le equazioni sono impossibili, ma non è sempre lo stesso del problema, dal quale sono derivate.

70. Mettendo di sopra (68) le equazioni

$$ab' = a'b,$$
$$ac' = a'c,$$

sotto la forma

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

abbiamo supposto, tacitamente, che i numeri a', b', c', fossero differenti da 0. Lasciamo al lettore, che discuta il caso in cui ciò non avviene, e verifichi che espressioni della forma $\frac{m}{0}$ e $\frac{0}{0}$ indicano anche allora l'impossibilità o la indeterminazione. Indicheremo soltanto un caso particolare. Se abbiamo $a = o$ $a' = o$, le formule

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b},$$
$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b},$$

divengono

$$x = \frac{cb' - c'b}{o},$$
$$y = \frac{o}{o}.$$

Questa è una eccezione al risultato trovato (68); che ogni qual volta una delle incognite si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$, lo stesso avviene dell' altra. Ma, in questo

caso, essendo nulli a e a', le due equazioni divengono

$$by = c,$$
$$b'y = c',$$

le quali sono due equazioni a *un' incognita*, e non due equazioni a due incognite.

Discussione delle formule di risoluzione di tre equazioni a tre incognite.

71*. Le formule trovate (60) per la risoluzione di tre equazioni di primo grado, a tre incognite,

$$(1) \quad ax+by+cz=k,$$
$$(2) \quad a'x+b'y+c'z=k',$$
$$(3) \quad a''x+b''y+c''z=k'',$$

ponendo

$(4)\ A=b'c''-b''c'$, $(5)\ A'=b''c-c''b$, $(6)\ A''=bc'-b'c$,
$(7)\ B=c'a''-a'c''$, $(8)\ B'=c''a-a''c$, $(9)\ B''=ca'-ac'$,
$(10) C=a'b''-a''b'$, $(11)\ C'=a''b-b''a$, $(12) C''=ab'-a'b$,

divengono (62*.)

$$(13) \quad \begin{cases} x=\dfrac{kA+k'A'+k''A''}{aA+a'A'+a''A''}, \\ y=\dfrac{kB+k'B'+k''B''}{bB+b'B'+b''B''}, \\ z=\dfrac{kC+k'C'+k''C''}{cC+c'C'+c''C''}. \end{cases}$$

Se il denominatore dei secondi membri di queste formule non è nullo, esse non possono offrire alcuna difficoltà. Esamineremo perciò soltanto il caso in cui

$$(14) \quad aA+a'A'+a''A''=bB+b'B'+b''B''=cC+c'C'+c''C''=o,$$

e lo divideremo in altri quattro.

72*. 1°. Supponiamo che sia nullo il denominatore comune, e differenti da zero tutti tre i numeratori delle formule (13). I valori delle tre incognite prendono allora la forma priva di significato, $\frac{m}{0}, \frac{n}{0}, \frac{p}{0}$, e le equazioni sono incompatibili. Infatti, moltiplichiamo la prima per A, la seconda per A', e sommiamole, avremo

$$(15) \qquad (aA+a'A')x+(bA+A'b')y+(cA+c'A')z=kA+k'A',$$

Ora dalla equazione (14) si ha

$$aA+a'A'=-a''A'',$$

e colla sostituzione dei valori dati dalle equazioni (4), (5), e (6), si verificano facilmente le eguaglianze

$$bA+b'A'=-b''A'',$$
$$cA+c'A'=-c''A'';$$

onde la equazione (15) diviene

$$-a''A''x-b''A''y-c''A''z=kA+k'A',$$

o anche

$$(16) \qquad A''a''x+A''b''y+c''A''z=-kA-k'A'.$$

Moltiplicando la equazione (1) per B, la (2) per B', e sommando, si ottiene

$$(aB+a'B')x+(bB+b'B')y+(cB+c'B')z=kB+k'B',$$

e poichè abbiamo, come si verifica facilmente per mezzo delle equazioni (14), (7), (8) e (9),

$$aB+a'B=-a''B'',$$
$$bB+b'B'=-b''B'',$$
$$cB+c'B'=-c''B'';$$

questa equazione prende la forma

$$-a''B''x-b''B''y-c''B''z=kB+k'B',$$

ossia

$$(17) \qquad B''a''x + B''b''y + B''c''z = -kB - k'B'.$$

I valori che sodisfanno alle equazioni (1) e (2), dovranno, evidentemente, sodisfare anche alle equazioni (16) e (17), e quindi, queste dovranno essere verificate dalle soluzioni del sistema delle equazioni (1), (2) e (3).

Ora il primo membro della (16) è eguale al primo della (3) moltiplicato per A'', e quindi, poichè queste equazioni sono verificate dai medesimi valori delle incognite, dovrà passare la stessa relazione tra i loro secondi membri, cioè dovrà aversi

$$-kA - k'A' = k''A'',$$

ossia

$$(18) \qquad kA + k'A' + k''A'' = o.$$

Anche il primo membro della (17) è eguale al primo della (3), moltiplicato per B'', e quindi, dovendo esistere la stessa relazione tra i secondi membri, bisogna che si abbia

$$-kB - k'B' = k''B'',$$

ossia

$$(19) \qquad kB + k'B' + k''B'' = o.$$

Ma le due equazioni (18) e (19) esprimono, contro il supposto, che i numeratori dei valori di x e di y, sono nulli. Dunque non possono essere verificate, e le equazioni (1), (2) e (3) sono incompatibili.

73*. 2°. Si annulli insieme col denominatore comune uno dei numeratori dei valori di x, y, e z; cioè oltre la equazione (14) sia verificata la equazione

$$kA + k'A' + k''A'' = o.$$

Se non sono eguali a zero tutte tre le quantità A, A', A'', si annulleranno necessariamente anche gli altri due numeratori, e i valori delle tre incognite si presenteranno tutti tre sotto la forma di $\frac{0}{0}$.

Infatti, poniamo

$$(20)\qquad \begin{cases} kA+k'A'+k''A''=N, \\ kB+k'B'+k''B''=N', \\ kC+k'C'+k''C''=N''. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima di queste equazioni per a, la seconda per b, la terza per c, e sommando, a cagione delle seguenti identità facili a verificarsi:

$$aA'+bB'+cC'=o, \qquad aA''+bB''+cC''=o,$$

e indicando con D il denominatore $aA+a'A'+a''A''$, che è anche eguale ad

$$aA+bB+cC,$$

otterremo:

$$(21)\qquad kD=aN+bN'+cN''.$$

Moltiplicando rispettivamente per a', b', c' le tre equazioni (20), sommando e riducendo colle identità:

$$a'A+b'B+c'C=o, \qquad a'A''+b'B''+c'C''=o;$$

avremo:

$$(22)\qquad k'D=a'N+b'N'+c'N''.$$

Analogamente dimostreremo l' equazione:

$$(23)\qquad k''D=a''N+b''N'+c''N''.$$

Ora, poichè, per ipotesi, $D=o$ e $N=o$, dalle equazioni (21), (22) e (23) si deducono le seguenti:

$$b\,N'+c\,N''=o, \quad b'N'+c'N''=o, \quad b''N'+c''N''=o,$$

onde

$$(bc'-b'c)N'=o, (b'c''-b''c')N'=o, (b'c''-b''c)N'=o,$$
$$(b'c-bc')N''=o, (b''c'-b'c'')N''=o, (b''c-bc'')N''=o,$$

le quali non possono coesistere a meno che non si abbia:

$$N'=o,\ N''=o,$$

oppure:

$$b'c''-b''c'=A=o,\ \ b''c-bc''=A'=o,\ \ bc'-b'c=A''=o,$$

come volevamo dimostrare.

Supponiamo che siano nulli tutti tre i numeratori N, N' e N'' insieme col denominatore D, e differenti da zero le tre quantità A, A' ed A''.

In questo caso, l'equazione:

$$(16)\qquad A''a''x+A''b''y+A''c''z=-kA-k'A',$$

che è una conseguenza delle equazioni (1) e (2), è equivalente alla equazione (3); infatti abbiamo:

$$kA+k'A'+k''A''=0,$$

e quindi:

$$-kA-k'A'=k''A'';$$

sostituendo questo valore nell'equazione (16) e dividendo per A'', che è differente da zero, si ottiene:

$$a''x+b''y+c''z=k''.$$

Lo stesso ragionamento e la stessa conclusione può farsi, se anche essendo eguali a zero le tre quantità A, A', A'', sono differenti da zero B, B', B'', o C, C', C''. Dunque, quando tutte tre le incognite si presentano sotto la forma di $\frac{0}{0}$, senza che si annullino o tutte tre le quantità A, A', A'', o tutte tre le quantità B, B', B''.

o tutte tre le C, C', C''; le tre equazioni equivalgono a due sole veramente distinte, e può prendersi un valore qualunque per una delle incognite, e dedurne valori convenienti per le altre due; quindi anche in questo caso il simbolo $\frac{0}{0}$ significa indeterminatezza.

74*. 3°. Siano eguali a zero, oltre al denominatore comune, anche le tre quantità A, A' e A''; e non siano nulli i due numeratori N' e N''.

In questo caso il valore di una incognita si presenta sotto la forma di $\frac{0}{0}$ e gli altri due sotto la forma $\frac{m}{0}$.

Dall'equazioni

$$A = b'c'' - b''c' = o,$$
$$A' = b''c - bc'' = o,$$
$$A'' = bc' - b'c = o,$$

si ricava:

$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} = \frac{b''}{c''};$$

e chiamando r il valore comune di questi rapporti, avremo:

$$b = cr, \qquad b' = c'r, \qquad b'' = c''r.$$

Sostituendo questi valori nell'equazioni (1), (2), (3), otterremo:

$$ax + c\,(ry + z) = k,$$
$$a'x + c'(ry + z) = k',$$
$$a''x + c''(ry + z) = k''.$$

Moltiplichiamo rispettivamente per B, B', B'' queste tre equazioni; avremo, sommando:

$$kB + k'B' + k''B'' = N' = o.$$

Se invece poniamo

$$c = br', \qquad c' = b'r', \qquad c'' = b''r',$$

le tre equazioni (1) (2) e (3) divengono:

$$ax + b(y + r'z) = k,$$
$$a'x + b'(y + r'z) = k',$$
$$a''x + b''(y + r'z) = k''.$$

Moltiplicando rispettivamente per C, C', C'' queste tre equazioni e sommandole, si ottiene:

$$kC + k'C' + k''C'' = N'' = o,$$

ed essendo, per ipotesi, N' ed N'' differenti da zero, se ne può dedurre che le tre equazioni sono incompatibili.

75*. 4°. Siano eguali a zero tutte le quantità A, A', A'', B, B', B'', C, C', C''. Per questo basta, in generale, che siano eguali a zero due A e due B.

Infatti supponiamo che sia:

$$A = o, \; A' = o, \qquad B = o, \; B' = o.$$

Dalle identità

$$bA + b'A' + b''A'' = o, \qquad aB + a'B' + a''B'' = o,$$

si deduce:

$$A'' = o, \; B'' = o.$$

ed è facile a ricavarsi dalle identità

$$aA + bB + cC = o,$$
$$aA' + bB' + cC' = o,$$
$$aA'' + bB'' + cC'' = o,$$

che saranno nulle anche le tre quantità C, C', C''. In questo caso i valori delle tre incognite si presenteranno sotto la forma di $\frac{0}{0}$.

Dalle equazioni

$$A' = bc'' - b''c = o, \qquad A'' = bc' - b'c = o,$$
$$B' = ca'' - ac'' = o, \qquad B'' = ca' - ac' = o,$$
$$C' = ab'' - a''b = o, \qquad C'' = ab' - a'b = o,$$

si ricava:

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}\,,\quad \frac{a''}{a}=\frac{b''}{b}=\frac{c''}{c}\,,$$

e chiamando r il primo rapporto ed r' il secondo, le tre equazioni prendono la forma

$$ax+by+cz=k\,,\qquad rax+rby+rcz=k'\,,$$
$$r'ax+r'by+r'cz=k''\,;$$

le quali, se

$$k'=rk \text{ e } k''=r'k\,,$$

sono, evidentemente, identiche; altrimenti sono impossibili.

Lasceremo al lettore la discussione dei casi nei quali l' annullarsi di alcuni coefficienti non permette di applicare i precedenti ragionamenti.

76'. Osserviamo che nel 3° caso i valori delle incognite si presentano, uno sotto la forma di $\frac{0}{0}$, e due sotto la forma di $\frac{m}{0}$. Ma in questo caso le tre equazioni, ponendo:

$$ry+z=u\,,$$

prendono la forma

$$ax+cu=k\,,\quad a'x+c'u=k'\,,\quad a''x+c''u=k''\,;$$

sono dunque tre equazioni con due incognite.

Nel 4° caso i valori delle incognite si presentano tutti sotto la forma di $\frac{0}{0}$, e l' equazioni possono essere incompatibili; ma, ponendo

$$ax+by+cz=u\,,$$

le tre equazioni divengono:

$$u=k\,,\qquad ru=k'\,,\qquad r'u=k''.$$

Sono tre equazioni con una sola incognita.

Possiamo dunque conchiudere che i valori delle incognite, quando sono tre le equazioni e tre le incognite, si presentano o tutti tre sotto forma determinata, o sotto la forma di $\frac{m}{0}$, o di $\frac{0}{0}$: e che nel secondo caso l'equazioni sono incompatibili, nel terzo una è conseguenza dell'altre due. Che vi sono dei casi di apparente eccezione, ma che allora l'equazioni possono ridursi a contenere o due incognite o una soltanto.

Esercizi.

1°. Quali relazioni devono esistere tra A, B, A', e B', perchè

$$\frac{Ax+B}{A'x+B'},$$

abbia un valore indipendente da x?

2°. Quali relazioni, tra A, B, C, A', B' e C', devono esser sodisfatte, affinchè la espressione

$$\frac{Ax+By+C}{A'x+B'y+C'},$$

sia indipendente da x e da y? Può essere indipendente da x senza essere anche da y?

3°. Trovare una progressione per differenza, nella quale vi sia un rapporto costante tra la somma degli x primi termini, e la somma dei kx seguenti, k essendo dato, e x potendo avere un valore qualunque intero.

4°. Un vaso di capacità v è empito in un tempo t da n cannelle, e dalla pioggia che cade sopra un tetto di superficie s. Un vaso di capacità v' è riempito in un tempo t' da n' cannelle, e dalla pioggia che cade sopra un tetto di superficie s': determinare, con questi dati, quanto versa nell'unità di tempo una cannella, e quanta ne cade sopra ogni unità di superficie del tetto.

Discutere i casi d'impossibilità e d'indeterminazione, e spiegarli *a priori*.

CAPITOLO VII.

SOLUZIONI NEGATIVE DELLE EQUAZIONI DI PRIMO GRADO.

—

Soluzioni negative delle equazioni a una incognita.

77. Non occorre fare alcuna osservazione sui numeri negativi, che si trovano nel risolvere una o più equazioni. Questi numeri sostituiti alle incognite, e calcolati colle regole derivanti dalle convenzioni stabilite, rendono il primo membro della equazione eguale al secondo. Ma quando le incognite rappresentano grandezze da determinarsi, pare che le soluzioni negative, non esprimendo alcuna grandezza, debbano esser rigettate e considerate come segno d'impossibilità. E difatto sarebbe così, se nello stabilire le equazioni, si potessero sempre esprimere in modo generale, e per tutti i casi, le condizioni del problema proposto. Ma spesso ciò non può farsi, e le soluzioni negative possono ricevere allora una interpretazione importante a studiarsi.

78. Consideriamo primieramente una sola equazione a una incognita

$$ax+b=a'x+b'.$$

Supponiamo che, risolvendola, si ottenga per x un valore negativo $-\alpha$; questo vuol dire che si ha

$$a(-\alpha)+b=a'(-\alpha)+b',$$

ossia $-a(\alpha)+b=-a'(\alpha)+b'$
e ora rappresentando con ξ la x si ha
$-a\xi+b=-a'\xi+b'$

e che, per conseguenza, $x = +\alpha$, è soluzione della equazione

$$b - ax = b' - a'x.$$

Così ogni soluzione negativa d'una equazione di primo grado a una incognita, presa positivamente, sodisfa a una equazione che si ottiene, cangiando nella prima, il segno dei termini che contengono la incognita. Ora, avviene spesso, come dimostreremo, che questa nuova equazione corrisponde a un problema poco differente dal proposto, e qualche volta a questo stesso problema, inteso in senso più generale; si ottiene allora la soluzione del problema modificato o generalizzato, prendendo, col segno $+$, il valore negativo trovato per la incognita. Ma qui non si può stabilire niente di generale, ed è necessario prendere qualche questione particolare, per mostrare come si può, molte volte, trovare una interpretazione per le quantità negative. Lo faremo nei problemi seguenti.

79. PROBLEMA 1°. *Due mobili che percorrono una linea retta, partono da due punti* A *e* B, *posti a una distanza* d *l'uno dall'altro, e si muovono nello stesso senso, colle velocità* v *e* v'. *Dopo quanto tempo s'incontreranno?*

Sia x il tempo cercato, il primo mobile che ha la velocità v, percorre uno spazio v nella unità di tempo, e quindi nel tempo x percorrerà vx; il secondo, nello stesso tempo, percorre lo spazio $v'x$; ora, perchè s'incontrino, bisogna che il primo abbia percorso uno spazio d di più del secondo; dunque si deve avere

$$vx - v'x = d,$$

onde si deduce

$$x = \frac{d}{v - v'}.$$

Se v è minore di v', questa soluzione è negativa; per interpetrarla, osserviamo (78) che, presa positivamente, sodisfa alla equazione

$$v'x - vx = d.$$

Ora, questa equazione esprime che il cammino fatto dal mobile B è maggiore di quello fatto dal mobile A; condizione che corrisponde evidentemente alla seguente questione:

Supponendo che i mobili siano in moto da un tempo indefinito, quanto tempo è che si sono incontrati?

Dunque se vogliamo dare questa estensione al problema, il valore negativo di x esprime un tempo già trascorso.

Problema 2°. *Le età di due individui sono* a *e* b, *dopo quanto tempo l'età del primo sarà doppia di quella del secondo?*

Se x è il tempo cercato, l'equazione del problema è evidentemente

$$a + x = 2(b + x),$$

e se ne deduce

$$x = a - 2b.$$

Se a è minore di $2b$, questo valore di x è negativo; preso positivamente, sodisfa (78) alla equazione

$$a - x = 2(b - x),$$

che, evidentemente, corrisponde alla questione seguente:

Quanto tempo è trascorso da che l'età del primo individuo era doppia di quella del secondo?

Problema 3°. *Dati sopra una retta due punti* A *e* B, *il primo alla sinistra di un punto* O *alla distanza* a, *il secondo alla diritta, a una distanza* b; *determinare sopra questa linea un terzo punto* X, *in modo che pren-*

dendo il punto M *in mezzo a* BX, *poi il terzo di* AM, *a partire da* A, *il punto così determinato coincida con* O.

A *O* *X* *M* *B*

Chiamando x la distanza OX, si ha

$$OM=\frac{b+x}{2}.$$

Bisogna che AO sia il terzo di AM, cioè, a eguale ad un terzo di $a+OM$, e quindi

$$3a=a+\frac{b+x}{2},$$

onde si deduce

$$x=4a-b.$$

Se $4a$ è minore di b, la soluzione è negativa; presa positivamente, sodisfa dunque (78) alla equazione

$$3a=a+\frac{b-x}{2},$$

che è precisamente la equazione alla quale si arriva, supponendo il punto X a una distanza x alla sinistra di O; il valore negativo deve dunque, in questo caso, essere portato in un senso opposto a quello che avevamo supposto nel mettere il problema in equazione.

80. Non bisogna credere però che tutte le soluzioni negative s' interpretino naturalmente come le precedenti. Non si può neppure affermare in modo generale che un valore negativo trovato per un tempo futuro, esprima un tempo passato, nè che le lunghezze negative da portarsi sopra una linea, debbano sempre essere contate in senso opposto a quello che corrisponde ai valori positivi. Ma questo avviene nel maggior numero dei casi, ed eccone la ragione.

81. Supponiamo che x indicando il tempo che deve

trascorrere prima di un certo avvenimento, sia stata trovata per equazione di un problema

$$(1)\qquad B+Ax=B'+A'x.$$

Se, invece di cercare il tempo che deve trascorrere, a cominciare dal momento presente, si fosse cercato il tempo che deve passare, cominciando da un' epoca anteriore di t anni (e, per esempio, questo accadrebbe, se prendessimo per incognito il millesimo dell' avvenimento); chiamando x_1 questo tempo, si avrebbe

$$x_1=t+x,$$
$$x=x_1-t,$$

e quindi, invece della (1),

$$(2)\qquad B+A(x_1-t)=B'+A'(x_1-t),$$

che sarebbe l' equazione del problema, quando si prendesse x_1 per incognita. Se il valore di x_1 che se ne deduce è minore di t ed eguale, per esempio, a $t-\alpha$, si avrà, sostituendo nella (2),

$$B-A\alpha=B'-A'\alpha,$$

onde si vede che l' equazione (1) ha per soluzione

$$x=-\alpha.$$

Una soluzione negativa $x=-\alpha$, trovata per l' equazione (1), significa dunque che l' avvenimento è posteriore di $t-\alpha$ a un epoca anteriore di t alla presente, cioè precede di α l' epoca presente.

82*. Perchè possa applicarsi il ragionamento precedente, non basta che x indichi unità di tempo nell' enunciato del problema; bisogna abbia anche lo stesso significato nell' equazione, che questa esprima una relazione tra numeri di unità di tempo e non di altra specie.

83. Supponiamo ora che indicando x una distanza da prendersi sopra una linea, partendo da un punto dato O, e in una data direzione, per esempio, da sinistra a destra, sia stata trovata per equazione di un problema

$$(1) \qquad B+Ax=B'+A'x.$$

Se, invece di cercare la distanza del punto incognito dalla origine data, si fosse cercata la sua distanza x, da un origine posta a sinistra della prima a una distanza d, avremmo avuto

$$x_1=d+x \text{ ossia } x=x_1-d,$$

e quindi, invece della (1),

$$(2) \qquad B+A(x_1-d)=B'+A'(x_1-d).$$

Se questa equazione dà per x_1 un valore positivo minore di d, che rappresenterò per $d-\alpha$, il punto cercato sarà evidentemente a sinistra di O e a una distanza α da questa origine; ma sostituendo, in (2), a x_1 il suo valore $d-\alpha$, si ha

$$B-A\alpha=B'-A'\alpha;$$

onde si deduce che l'equazione (1) ha per soluzione $x=-\alpha$. Una soluzione negativa, $x=-\alpha$, trovata per l'equazione (1) significa dunque, che il punto cercato è posto a sinistra di O e a una distanza α da questa origine.

84*. Osserveremo, come (82*), che il ragionamento precedente suppone che non solo nell'enunciato del problema, ma anche nell'equazione, x indichi unità di distanza e non di altra specie. Ora ciò non è sempre, e ne daremo un esempio.

Problema. *Una strada ferrata prende* b *franchi*

per tonnellata e per kilometro per il trasporto delle mercanzie; si paga inoltre un diritto fisso di a *franchi per tonnellata; a qual distanza si possono portare* c *tonnellate per* d *franchi?*

Sia x il numero incognito di kilometri che misura la distanza a cui si può portare la mercanzia. L'equazione del problema sarà:

$$(1) \qquad ac + bcx = d\,.$$

Risolvendola, abbiamo:

$$x = \frac{d - ac}{bc}.$$

Se $d < c$, si trova per x un valore negativo, il quale non può indicare che la distanza debba essere percorsa in senso opposto, perchè il prezzo del trasporto è lo stesso, tanto che le mercanzie si portino in un senso quanto in un altro. Ma nell'equazione (1) x non indica kilometri da percorrersi come nell'enunciato; indica franchi da pagarsi. Onde sono questi che debbono esser presi in senso opposto; cioè non devono essere pagati, ma riscossi: e il valore assoluto di x darà sempre il numero dei kilometri da percorrersi.

Dunque per interpetrare i valori negativi dell'incognite, bisogna aver riguardo alla relazione espressa dall'equazione. I ragionamenti dei numeri (81) e (83) valgono solo quando l'equazione (1) esprime effettivamente relazioni tra tempi o tra distanze.

Introduzione dei numeri negativi nell' enunciato di un problema.

85. Qualche volta è utile introdurre numeri negativi nei dati stessi di una questione. Mostreremo, soltanto con un esempio semplicissimo, come ciò possa farsi, e quale sia l' utile che vi si trova.

Riprendiamo il problema (79).

Due mobili percorrono la retta AA', *camminando nello stesso senso colle velocità* v *e* v'; *l' uno è in* A, *l' altro in* A'; *dopo quanto tempo s' incontreranno?*

Chiamando x il tempo incognito, e d la distanza AA', abbiamo la equazione

$$vx - v'x = d.$$

Questa equazione dà la soluzione del problema, anche quando v è minore di v', purchè si ritenga (79) che i valori negativi di x rappresentano un tempo già trascorso.

Per generalizzare ancora di più, supponiamo che i due mobili non camminino ambedue nella direzione AA'. Si possono considerare tre diversi casi:

1°. Il mobile A cammina verso la destra, e A' verso la sinistra;

A →———————← A'

l' equazione del problema allora è, come si vede facilmente,

$$vx + v'x = d;$$

2°. A si muove verso la sinistra, A' verso la destra;

A ←———————→ A'

i mobili non s' incontreranno mai, ma chiamando x il tempo trascorso dopo il loro incontro, avremo

$$vx+v'x=d;$$

3°. Finalmente, supponendo che si muovano ambedue verso la sinistra, si avrà

$$v'x-vx=d.$$

Ricapitolando: le equazioni relative ai quattro casi sono

$vx-v'x=d$,	quando	A e A' si muovono verso la destra,
$vx+v'x=d$,	»	A verso la destra, A' verso la sinistra,
$vx+v'x=d$,	»	A verso la sinistra, A' verso la destra, x indica un tempo già trascorso,
$v'x-vx=d$,	»	A e A' verso la sinistra.

Ora, queste quattro equazioni possono ridursi a una sola (con che otterremo certamente un vantaggio) convenendo di rappresentare con numeri negativi $-v$, $-v'$ le velocità dirette verso la sinistra; poichè, per questa convenzione, bisognerà sostituire nella seconda delle equazioni di sopra $-v'$ a v'; nella terza, $-v$ a v; nella quarta $-v$ a v, e $-v'$ a v'; e di più, nella terza, in cui l' incognita indica un tempo trascorso, $-x$ a x; con queste sostituzioni, le quattro equazioni divengono:

$$vx-v'x=d;$$

in guisa che la formula

$$x=\frac{d}{v-v'},$$

che se ne deduce, serve per tutti i casi.

Questa formula serve a risolvere il problema quando è dato d e i valori numeri di v e v' i quali valori bisogna avere attenzione a sostituirli coi quei segni che loro competono in dipendenza dalla direzion del moto

Soluzioni negative delle equazioni a due incognite.

86. Fin qui abbiamo considerate soltanto le soluzioni negative che s'incontrano nel risolvere le equazioni a una sola incognita. Nel caso di più equazioni, possono farsi osservazioni affatto simili.

Supponiamo che risolvendo il sistema

$$(1) \qquad \begin{aligned} ax+by&=c, \\ a'x+b'y&=c', \end{aligned}$$

siano stati trovati, per una incognita, o per tutte due, valori negativi. Siano, per esempio, $x=\alpha$, $y=-\beta$. Poichè questi valori sodisfanno le equazioni (1), avremo

$$\begin{aligned} a\alpha-b\beta&=c, \\ a'\alpha-b'\beta&=c'; \end{aligned}$$

e quindi, i valori $x=\alpha$, $y=\beta$ sodisfaranno al sistema

$$\begin{aligned} ax-by&=c, \\ a'x-b'y&=c'. \end{aligned}$$

Dunque, prendendo positivamente la soluzione negativa $y=-\beta$, si sodisfa a un sistema che differisce dal proposto per il cangiamento di segno dei termini con y. Si vedrebbe nello stesso modo che se il valore di x fosse negativo, si potrebbe prendere col segno $+$, purchè si cangiasse nelle equazioni proposte il segno a tutti i termini con x.

Le nuove equazioni sodisfatte dai valori negativi delle incognite presi positivamente, corrispondono qualche volta a un problema poco differente dal proposto, o a questo problema stesso, inteso in un senso più generale; ma questo, come nel caso delle equazioni a

una sola incognita, non può mostrarsi chiaramente, senza prendere ad esaminare qualche questione particolare.

Consideriamo, per esempio, il problema seguente:

87. Problema. *Un vaso di capacità* v *è ripieno in un tempo* t *da* n *cannelle, della stessa portata, e dalla pioggia che cade sopra un tetto, di superficie* s. *Un altro vaso di capacità* v′ *è ripieno nel tempo* t′, *da* n′ *cannelle simili alle precedenti e dalla pioggia che cade sopra un tetto* s′, *colla stessa intensità che sul tetto* s. *Dedurre da questi dati la quantità d'acqua* x *versata da ogni cannella nella unità di tempo, e la quantità* y *piovuta in ogni unità di tempo, sopra l'unità di superficie di tetto.*

Poichè x è l'acqua versata da una cannella, nell'unità di tempo, quella versata da n cannelle, nel tempo t, sarà nxt.

Essendo y la quantità d'acqua piovuta sull'unità di superficie, nell'unità di tempo, quella piovuta sulla superficie s nel tempo t sarà sty; dunque avremo

$$(1) \qquad nxt+syt=v.$$

Esprimendo che il secondo vaso è ripieno nel tempo t', otterremo nello stesso modo

$$(2) \qquad n'xt'+s'yt'=v',$$

e le equazioni (1) e (2) daranno x e y.

Supponiamo ora, che risolvendole, si trovi per x un valor positivo α, e per y una valore negativo $-\beta$. Bisognerà concluderne (86) che i valori $x=\alpha$, $y=-\beta$ sodisfanno all'equazioni

$$nxt-syt=v,$$
$$n'xt'-s'yt'=v'.$$

Queste equazioni corrispondono a un altro problema nel

quale, invece della pioggia, vi è una causa che toglie dai vasi quantità d'acqua proporzionali al tempo, e alle superficie s' e s, che potrebbe essere, per esempio, l'evaporazione.

Se all'opposto, trovassimo un valore negativo per x, questo valore, preso positivamente, sodisfarebbe all'equazioni

$$syt-nxt=v,$$
$$s'yt'-n'xt'=v'.$$

Queste equazioni corrispondono a un altro problema, nel quale, invece delle cannelle che versano acqua, abbiamo un numero eguale di cause che ne portano via, per esempio, orifizi o pompe, che estraggono una quantità x d'acqua in ogni unità di tempo.

88. Le osservazioni (81) (83) sopra i valori negativi dei tempi e delle lunghezze, valgono senza modificazione, anche quando le equazioni hanno più incognite.

Esercizi.

1°. Dati più punti A, B, C, D, situati sopra una linea retta, alle distanze a, b, c, d, da un punto O di questa retta; trovare sopra questa retta un punto X tale, che la sua distanza da un punto qualunque M della retta data, sia la media delle distanze di M dai punti A, B, C, D. Dimostrare che, mediante adattate convenzioni, si può risolvere il problema con una sola formula, qualunque siano le posizioni di A,B,C,D, tanto a destra quanto a sinistra di O.

2°. Date le due basi a e b d'un trapezio e la sua altezza h; calcolare l'altezza del triangolo ottenuto prolungando i lati finchè s'incontrino: interpretare la soluzione nel caso che sia negativa.

3° Inscrivere un rettangolo di un dato perimetro, in un triangolo la cui base è b e l'altezza h.

4°. n pietre sono disposte in linea retta, a dieci metri di distanza una dall' altra. Determinare, su questa retta, un punto X tale che vi sia m volte più cammino da farsi per trasportare, successivamente, ogni pietra nel punto X, che per trasportarle nel posto occupato dalla prima pietra. Supporremo, in ambedue i casi, che si parta dalla prima pietra. Se la soluzione è negativa, sarà possibile interpetrarla?

5°. Dati due triangoli rettangoli, che abbiano i cateti sulle medesime rette, e date le lunghezze a, b, a' b', dei cateti medesimi; calcolare le perpendicolari abbassate sui lati dal punto d' intersezione delle ipotenuse, e discutere i differenti casi che possono presentarsi.

CAPITOLO VIII.

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO.

Risoluzione dell' equazione di secondo grado.

89. Una equazione a una incognita è di secondo grado, quando può porsi sotto la forma

$$ax^2+bx+c=o, \tag{1}$$

nella quale x rappresenta l'incognita, e a, b, c sono numeri dati.

Per risolvere la equazione (1), moltiplichiamone i due membri per $4a$, ciò che può farsi (43), purchè a non sia nullo, e facciamo passare $4ac$ nel secondo membro. Otterremo

$$4a^2x^2+4bax=-4ac.$$

Aggiungendo b^2 ai due membri di questa equazione, essa diviene

$$4a^2x^2+4bax+b^2=b^2-4ac;$$

il primo membro essendo, come è facile a verificarsi, il quadrato di $2ax+b$, questa equazione può scriversi:

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac,$$

che equivale a

$$2ax+b=\sqrt{b^2-4ac},$$

equazione di primo grado, dalla quale si deduce

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{2}$$

90*. Si può risolvere la equazione generale di secondo grado, anche in altro modo. Poniamo

$$x = y + z;$$

e questo potrà sempre farsi, purchè y e z siano tali, che risulti verificata l'equazione

$$a(y+z)^2 + b(y+z) + c = o,$$

o anche, eseguendo il quadrato e riducendo,

$$ay^2 + (2az+b)y + az^2 + bz + c = o.$$

Prendiamo per z il valore che verifica

$$2az + b = o,$$

cioè

$$z = -\frac{b}{2a},$$

e l'equazione, a cui si dovrà sodisfare, diverrà

$$ay^2 + az^2 + bz + c = o.$$

Sostituendo, invece di z, il valore trovato, si ottiene

$$ay^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = o.$$

che equivale ad

$$ay^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = o;$$

onde si ricava

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

e quindi

$$y = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Sommando i valori di z e di y, otterremo x, cioè, come abbiamo già trovato (89),

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{2}$$

91. Osservazione I. La formula (2) dà due valori differenti di x, perchè l'espressione $\sqrt{b^2-4ac}$ rappresenta, indifferentemente, due numeri eguali e di segni contrari. Se, per esempio, b^2-4ac è eguale a 9, $\sqrt{b^2-4ac}$ è eguale a $+3$ o a -3. S'indica, in generale, questo doppio valore del radicale scrivendo la formula (2) nel modo seguente:

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

e si sottintende allora che $+\sqrt{b^2-4ac}$ rappresenta il valore positivo del radicale, e $-\sqrt{b^2-4ac}$ il suo valore negativo.

Le soluzioni di una equazione si chiamano *radici;* si può dire dunque, che una equazione di secondo grado ha due radici x' e x'', espresse dalle formule

$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

92. Se b^2-4ac è negativo, $\sqrt{b^2-4ac}$ non rappresenta, per le nostre convenzioni, alcun numero positivo o negativo, e l'equazione proposta non ha soluzione. Nondimeno, si dice allora che ha due radici *imaginarie* espresse dalla formula (2).

Si chiama in generale numero imaginario, la radice quadrata di un numero negativo. Non bisogna attaccare a questa locuzione nessuna idea di misura di grandezza.

Un numero imaginario, simile in ciò a un numero negativo, non rappresenta alcuna grandezza; ma, come le operazioni relative ai numeri negativi, anche quelle relative ai numeri imaginari, ricevono, per convenzione, un senso, e divengono mezzo prezioso di generalizzazione. La prima convenzione consiste nell'ammettere che il quadrato di $\sqrt{-A}$ è $-A$; per definire le altre operazioni si conviene di applicare ai numeri immaginari tutte le regole dimostrate per i numeri reali.

Dedicheremo, in seguito, un Capitolo alla teorica dei numeri immaginari.

93. Se b^2-4ac è nullo, i due valori di $\sqrt{b^2-4ac}$ si riducono a zero, e le radici divengono ambedue

$$x=-\frac{b}{2a},$$

e quindi l'equazione non ha altro che una sola soluzione. Nonostante diremo che ha due radici eguali.

94. Ricapitolando; l'equazione

$$ax^2+bx+c=o$$

ammette o due soluzioni, o una sola, o nessuna. Nonostante, si dice che ne ha sempre due, che possono essere reali e differenti, reali ed eguali, o immaginarie. A prima vista, può sembrare puerile di dare questo giro al discorso, per affermare sempre che esistono due radici, mentre che con questo non si dà loro esistenza, se non l'hanno. Ma queste locuzioni e l'introduzione, nei calcoli, dei numeri imaginari sono conseguenza del bisogno di generalizzare, che abbiamo nell'Algebra. Infatti, sarebbe impossibile di operare sopra espressioni *letterali*, se la forma dei risultati cangiasse col valore numerico delle lettere. Bisognerebbe continuamente dividere e suddividere le questioni per ottenere le formule corrispondenti

alle diverse ipotesi. L'introduzione dei numeri negativi e immaginari, ha per iscopo di evitare questo inconveniente. In una questione particolare essi non sarebbero di alcun vantaggio, ma nello studio generale di una classe di questioni, permettono di esprimere e di dimostrare contemporaneamente regole e risultati, che richiederebbero altrimenti dimostrazioni separate e formule diverse.

Relazioni tra le radici e i coefficienti di una equazione di secondo grado.

95. L'equazione

$$ax^2+bx+c=o,$$

ha, come abbiamo veduto, due radici

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

sommandole, si trova

$$x'+x''=-\frac{b}{a};$$

moltiplicandole,

$$x'x''=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a};$$

la somma e il prodotto dipendono dunque, in modo semplice, dai coefficienti dell'equazione.

96. Le precedenti relazioni dimostrano chiaramente, che le radici di una equazione di secondo grado risolvono il seguente problema:

Trovare due numeri, quando n'è data la somma e il prodotto.

Infatti; siano, S la somma, P il prodotto dei due numeri; si potranno prendere per questi due numeri, le radici della equazione

(1) $$x^2-Sx+P=o,$$

perchè (95) la somma di queste radici è S, e il prodotto è P. È facile dare all' equazione (1) una forma, che mostri, *a priori*, la ragione di questo fatto; poichè può scriversi

$$P=Sx-x^2,$$

o

$$P=x(S-x),$$

e si vede che risolvere questa equazione è lo stesso che trovare due numeri x e $S-x$, che abbiano per prodotto P, e per somma $x+S-x$, ossia S.

Applicazione dei resultati precedenti.

97. Se x' e x'' rappresentano le radici dell' equazione

(1) $$ax^2+bx+c=o,$$

abbiamo (95)

$$x'+x''=-\frac{b}{a},$$

$$x'x''=\frac{c}{a}.$$

Dividendo i due membri dell' equazione (1) per a, e sostituendo a $\frac{b}{a}$ e a $\frac{c}{a}$ i valori precedenti, il primo membro diviene

$$x^2-(x'+x'')x+x'x'',$$

o, come è facile a verificarsi,

$$(x-x')(x-x'').$$

Dunque, il primo membro di una equazione di secondo grado

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=o,$$

è il prodotto di due binomi di primo grado, eguali all'eccesso di x sopra ciascuna radice.

Se la equazione proposta è della forma

$$ax^2+bx+c=o,$$

soltanto dopo averla divisa per a, otterremo il risultato precedente, e quindi, prima di questa divisione, il primo membro è eguale ad

$$a(x-x')(x-x'').$$

98. Se le due radici x' e x'' sono eguali, i fattori $x-x'$ e $x-x''$ divengono eguali, e il primo membro è un quadrato perfetto. Questo risultato si verifica facilmente. Affinchè le radici della equazione (1) siano eguali (93), è necessario che sia

$$b^2=4ac,$$

o

$$c=\frac{b^2}{4a}.$$

Sostituendo a c il suo valore e dividendo i due membri dell'equazione (1) per a, si ottiene

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=o,$$

cioè

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=o.$$

99*, Mediante le relazioni che danno la somma e il prodotto delle radici, si possono determinare i loro segni, senza risolvere l'equazione.

Se il segno di $\frac{c}{a}$ è positivo, le due radici, dovendo dare un prodotto positivo, avranno segni eguali, e se, nello stesso tempo, il segno di $-\frac{b}{a}$ è positivo, essendo la loro somma positiva, saranno ambedue positive; se $-\frac{b}{a}$ è negativo, la loro somma dovendo essere negativa, saranno ambedue negative. Per le stesse ragioni, se il segno di $\frac{c}{a}$ è negativo, le due radici avranno segni opposti, e se, nello stesso tempo, $-\frac{b}{a}$ è positivo, la radice numericamente maggiore sarà positiva; se $-\frac{b}{a}$ è negativo, la radice numericamente maggiore sarà negativa.

Chiamando x' la radice numericamente maggiore, e x'' l'altra, e ponendo sotto alle lettere i segni dei numeri che rappresentano, avremo che

se	a	b	c,	sarà	x'	x''
	+	+	+		−	−
	+	−	+		+	+
	+	+	−		−	+
	+	−	−		+	−;

onde, chiamando *variazione* il succedersi di due segni differenti, e *permanenza* il succedersi di due segni eguali nella equazione, si ha il seguente teorema:

Se una equazione di secondo grado ha il primo termine positivo e le sue radici reali, il numero delle radici positive sarà eguale a quello delle sue variazioni, e il numero delle negative a quello delle sue permanenze, e la radice numericamente maggiore sarà positiva o negativa, secondo che si avrà prima, una variazione, o una permanenza.

ESEMPIO. 1°. Nella equazione

$$x^2-3x-4=o,$$

si ha prima una variazione, e poi una permanenza, dunque si hanno due radici una positiva e una negativa, e la positiva è numericamente maggiore.

ESEMPIO 2°. Nella equazione

$$x^2-3x+10=o,$$

parrebbe che le radici fossero tutte due positive, perchè si hanno due variazioni. Ma l'espressione b^2-4ac, essendo eguale a -31, è negativa, e le radici non sono reali (92).

Osserveremo qui, che le radici sono sempre reali, quando il loro prodotto $\frac{c}{a}$ è negativo. Infatti, se $\frac{c}{a}$ è negativo, sarà negativo anche ac, perchè

$$ac=\frac{c}{a}\times a^2,$$

e il fattore a^2 è essenzialmente positivo. Essendo ac negativo, $4ac$ sarà pure negativo, e quindi $-4ac$ positivo, e *a fortiori* b^2-4ac; dunque le radici saranno reali.

Ma perchè $\frac{c}{a}$ sia negativo, c ed a devono avere segni contrari nell'equazione; e questo avviene sempre quando abbiamo una permanenza e una variazione. *Dunque se una equazione di secondo grado ha una permanenza e una variazione, le sue radici sono reali.*

Esame di un caso particolare notevole.

100. Quando, nella equazione

$$ax^2+bx+c=o,$$

supponiamo che il coefficente a prenda il valore o, le formule che esprimono le radici,

$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$
$$x'' = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

prendono la forma

$$x' = \frac{0}{0},$$
$$x'' = \frac{-2b}{o};$$

e l'equazione proposta, che diviene

$$bx+c=o,$$

è allora di primo grado, e ha l'unica soluzione

$$x=\frac{-c}{b};$$

dunque le formule generali sembrano in questo caso essere in difetto.

Osserviamo primieramente, che anche se questo realmente accadesse, non bisognerebbe concludere nulla contro i ragionamenti che vi hanno condotto, perchè nei medesimi abbiamo supposto (89) che a non sia nullo.

Ma uno dei valori x' e x'', che sodisfanno all'equazione proposta, qualunque sia a, quando a si avvicina a zero deve avvicinarsi alla soluzione di

$$bx+c=o.$$

Possiamo dimostrare questo per il primo. Il secondo, evidentemente, aumenta senza limite col diminuire di a.

Abbiamo

$$x' = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Moltiplicando i due termini di questa frazione per $-b-\sqrt{b^2-4ac}$, avremo

$$x=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{4ac}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}$$

$$=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}},$$

e sotto questa forma è evidente, che mentre a si avvicina a zero, x tende verso il valore $-\frac{2c}{2b}$ o $-\frac{c}{b}$.

Soluzione di alcuni problemi.

101. Problema 1°. *Calcolare la profondità di un pozzo, sapendo che sono trascorsi* t *secondi dal momento in cui vi si è lasciata cadere una pietra, a quello in cui il romore fatto battendo nel fondo, è tornato a colpire l' orecchio.*

Per risolvere questo problema, bisogna rammentare due principj di Fisica.

1°. Lo spazio percorso da un grave è proporzionale al quadrato del tempo trascorso dal principio della caduta, ed è rappresentato dalla formula

$$s=\frac{gt^2}{2},$$

nella quale g rappresenta un coefficiente costante eguale a $9^m,809$.

2°. Il suono si propaga con moto uniforme e percorre 333^m per secondo. Nel seguente calcolo, rappresenteremo con v la sua velocità; in modo che, nel tempo t, percorrerà lo spazio vt.

Sia x il numero dei metri che esprime la misura

della profondità del pozzo. Chiamando t_1 il numero dei secondi che la pietra impiega a discendere, abbiamo

(1) $$x=\frac{gt_1^2}{2}, \text{ onde } t_1=\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Se t_2 indica il numero dei secondi impicgati dal suono a risalire all'orecchio, avremo

(2) $$x=vt_2, \text{ onde } t_2=\frac{x}{v},$$

in guisa che

(3) $$t_1+t_2=t=\frac{x}{v}+\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Per risolvere questa equazione, poniamola sotto la forma

(4) $$t-\frac{x}{v}=\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Inalzando i due membri a quadrato, si ha

(5) $$t^2-\frac{2tx}{v}+\frac{x^2}{v^2}=\frac{2x}{g},$$

e portando tutti i termini nel primo membro

(6) $$\frac{x^2}{v^2}-\left(\frac{2t}{v}+\frac{2}{g}\right)x+t^2=o;$$

onde

$$x=\frac{\frac{t}{v}+\frac{1}{g}\pm\sqrt{\left(\frac{t}{v}+\frac{1}{g}\right)^2-\frac{t^2}{v^2}}}{\frac{1}{v^2}}.$$

Le due radici sono reali, perchè la quantità posta sotto il radicale,

$$\left(\frac{t}{v}+\frac{1}{g}\right)^2-\frac{t^2}{v^2},$$

è evidentemente positiva.

Si vede facilmente che sono ambedue positive; perchè essendo t^2v^2, e $\left(\frac{2t}{v}+\frac{2}{g}\right)v^2$ positivi, si hanno due variazioni nelle equazioni (6). Nonostante, il problema non può avere più di una soluzione: perchè due pozzi di profondità differente non possono corrispondere a uno stesso tempo t. Per ispiegare questa apparente contradizione, e trovare la radice che corrisponde alla questione, osserviamo che, inalzando a quadrato i due membri della equazione (4), formiamo una nuova equazione, che sebbene sia verificata dai valori che sodisfanno alla proposta, può però essere sodisfatta anche da altri valori. I due membri avrebbero, infatti, quadrati eguali, se fossero eguali e di segni contrari; l'equazione (5) equivale dunque realmente alle due seguenti

$$t-\frac{x}{v}=\sqrt{\frac{2x}{g}},$$

$$t-\frac{x}{v}=-\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

La prima di queste soltanto corrisponde al problema proposto, e la radice della medesima, che è minore di vt, perchè rende $t-\frac{x}{v}$ positivo, è quella che sodisfa al problema. La soluzione della seconda, che è maggiore di vt, e per conseguenza è la maggiore delle radici della equazione (5), deve essere rigettata come soluzione estranea.

Problema 2°. *Dividere una retta in media ed estrema ragione, cioè dividerla in due parti, in modo che la parte maggiore sia media proporzionale tra l'intera linea e l'altra parte.*

Sia a la linea data e x la parte maggiore; dovrà aversi

$$a : x :: x : a-x,$$

ossia

$$x^2 = a(a-x),$$
$$x^2+ax-a^2 = o,$$

e quindi

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Una delle radici è positiva e dà il valore di x, l'altra è negativa e dev' essere rigettata.

Si può interpretare la radice negativa. Infatti, rappresentandola con $-\alpha$, avremo

$$(-\alpha)^2 = a(a-(-\alpha)),$$

ossia

$$\alpha^2 = a(a+\alpha);$$

dunque α è media proporzionale tra a e $a+\alpha$, e corrisponde alla seguente questione:

Trovare sul prolungamento di AB

X A B

un punto X, che sia distante da A di una lunghezza $AX = \alpha$ media proporzionale tra $AB = a$, e $XB = a+\alpha$.

Dunque, come nella maggior parte dei problemi di primo grado (83), la soluzione negativa deve essere portata sulla retta AB, in senso opposto alla soluzione positiva.

PROBLEMA 3°. *Trovare sopra una retta* PQ *un punto* X, *che riceva una egual quantità di luce da due lumi* A e B, *che hanno le intensità* i e i': *sono date* AP = a, BQ = b, PQ = d *e* AP *e* BQ *sono le perpendicolari abbassate da* A *e da* B *sopra* PQ.

Per risolvere questo problema, bisogna rammentarsi, che l'intensità della luce è in ragione inversa del quadrato della distanza del punto illuminato al punto luminoso, in guisa che un lume d'intensità i illumina alla distanza x coll' intensità $\frac{i}{x^2}$.

Per conseguenza, avremo

$$\frac{i}{\overline{AX}^2}=\frac{i'}{\overline{BX}^2},$$

e indicando PX con x e quindi QX con $d-x$,

$$\frac{i}{a^2+x^2}=\frac{i'}{b^2+(d-x)^2},$$

ossia, mandando via i denominatori,

$$[b^2+(d-x)^2]i=(a^2+x^2)i'.$$

Senza entrare nei particolari della soluzione di questa equazione e delle condizioni di possibilità del problema, cerchiamo d'interpetrare le soluzioni negative che essa può avere. Indicando con $-\alpha$ una soluzione negativa, avremo

$$\frac{i}{a^2+\alpha^2}=\frac{i'}{b^2+(d+\alpha)^2},$$

che è precisamente l'equazione che avremmo dovuto scrivere se, cercando il punto X a sinistra di P, si fosse indicata con α la sua distanza incognita dal punto P. Le soluzioni negative risolvono dunque il problema proposto, purchè si portino le lunghezze, che esse rappresentano, alla sinistra di P, cioè nel senso opposto a quello che corrisponde alle soluzioni positive.

Esercizi.

1°. Formare la somma dei quadrati, dei cubi, delle quarte potenze e delle inverse delle quarte potenze delle radici dell' equazione

$$ax^2+bx+c=o.$$

2°. Trovare le condizioni necessarie, perchè la frazione

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{A'x^2+B'x+C'},$$

sia indipendente da x.

3°. Se

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{A'x^2+B'x+C'}=\frac{Ay^2+By+C}{A'y^2+B'y+C'}=\frac{Az^2+Bz+C}{A'z^2+B'z+C'},$$

due dei numeri x, y, z, saranno eguali tra loro, a meno che non sia

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

4°. Determinare le condizioni necessarie, perchè la frazione

$$\frac{Ay^2+Byx+Cx^2+Dy+Ex+F}{A'y^2+B'yx+C'x^2+D'y+E'x+F'},$$

sia indipendente da x e da y.

5°. Un viaggiatore parte da un punto B, per andare verso C, nello stesso tempo che un altro viaggiatore parte da C per andare verso B. Tutti due camminano con una velocità costante. Queste due velocità hanno un tal rapporto che il primo arriva in C, quattro ore dopo che si sono incontrati, e il secondo arriva in B, nove ore dopo questo incontro. Qual' è il rapporto delle loro velocità?

Risolvere le equazioni:

6°. $$2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20.$$

7°. $$2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=o.$$

8°. $$\frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}-\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}=1.$$

9°. $$\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{1-x^2}.$$

10°. $$\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{x^2}.$$

11°. $$x^2+\sqrt{5x+x^2}=42-5x.$$

12°. Trovare il limite di $\sqrt{x^2+5x-1}-x$, allorchè x aumenta indefinitamente.

13°. Trovare il limite di $a-\sqrt{a^2-b}$, a e b aumentando in modo che il rapporto $\frac{b^2}{a}$ si avvicini a un limite fisso.

14° Dato un circolo, e un punto O sopra un diametro; trovare una retta P perpendicolare a questo diametro, e tale che conducendo per il punto O una secante che intersechi la circonferenza in A e B, e rappresentando con p e q le distanze dei punti A e B dalla retta P, la somma $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ sia indipendente dalla direzione di AB.

15°. Dati due circoli, uno interno all'altro, trovare sulla linea dei centri un punto tale che le distanze del medesimo, dai due punti dove le circonferenze sono intersecate da una stessa perpendicolare alla linea dei centri, siano in un rapporto costante.

Risolvere le equazioni:

16°. $$\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}+\sqrt{c+x}=o.$$

17°. $$\sqrt[2pq]{x^{p+q}}-\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}(\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x})=o.$$

18°. $$\frac{x^2}{8a}+\frac{2x}{3}=\sqrt{\frac{x^3}{3a}+\frac{x^2}{4}-\frac{a}{2}}.$$

19°. Dimostrare che se l'equazione $ax^2+bx+c=o$ ha le sue radici immaginarie, ax^2+bx+c è eguale ad a moltiplicato per la somma di due quadrati di quantità reali.

CAPITOLO IX.

EQUAZIONI CHE SI RIDUCONO A QUELLE DI SECONDO GRADO.

Equazioni biquadratiche.

102. Si possono ridurre a equazioni di secondo grado, alcune di grado più elevato, per mezzo di un cangiamento d'incognita.

Consideriamo in particolare l'equazione

(1) $$ax^4+bx^2+c=o,$$

che si chiama equazione biquadratica.

Prendendo x^2 per incognita, questa equazione diviene di secondo grado; poichè, ponendo $x^2=z$, abbiamo $x^4=z^2$, e l'equazione (1) diviene

$$az^2+bz+c=o.$$

Da questa si ricava

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

e quindi

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

x ha dunque, in generale, quattro valori, due a due eguali e di segni contrari. Tutti quattro sono reali, se i due valori di z sono positivi; se uno di questi valori è positivo, e l'altro negativo, due sono reali e due ima-

ginari; finalmente se tutti due i valori di z sono negativi o imaginari, x non ammette nessun valore reale.

Trasformazione delle espressioni della forma $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.

103. Si può qualche volta transformare la espressione $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ in una somma di due radicali semplici, e porre

(1) $$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y},$$

dove x e y sono commensurabili. Infatti; inalzando a quadrato i due membri della equazione (1), si ottiene

(2) $$a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy},$$

equazione a cui si sodisfa, prendendo x ed y in modo che si abbia

(3) $$\begin{cases} a=x+y, \\ \sqrt{b}=2\sqrt{xy}, \end{cases}$$

ossia

(4) $$\begin{cases} a=x+y, \\ b=4xy. \end{cases}$$

Queste due equazioni (4) ci fanno conoscere (96) che x e y sono le due radici dell' equazione

$$z^2-az+\frac{b}{4}=o;$$

cioè

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2},$$

$$y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}.$$

Se dunque a^2-b è un quadrato perfetto, x e y saranno razionali, e la trasformazione si effettuerà colla formula

$$(5) \quad \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Questa formula (5) è vera qualunque siano a e b, ma non torna utile che quando a^2-b è un quadrato perfetto.

104. Osservazione I. Nella dimostrazione della formula (5) vi è una difficoltà su cui bisogna fermarsi.

L'equazione a cui si deve sodisfare, è

$$(1) \qquad \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

Si è cominciato da sostituire ad essa la seguente:

$$(2) \qquad a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy},$$

che si ottiene inalzando i due membri a quadrato. Ora questa equazione (2) è più generale della proposta, perchè potrebbe essere sodisfatta anche se avessimo

$$-\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

Ma se conveniamo di prendere i radicali col segno $+$, questa ultima equazione diviene impossibile, e la equazione (2) diviene allora completamente equivalente alla (1). È evidente che sarà sodisfatta ponendo

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} a&=x+y, \\ \sqrt{b}&=2\sqrt{xy} \end{aligned} \right. .$$

Sostituendo a queste due equazioni

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} a&=x+y, \\ b&=4xy, \end{aligned} \right.$$

si ha una difficoltà analoga alla precedente; l'equazione $b=4xy$ è più generale di $\sqrt{b}=2\sqrt{xy}$, e sarebbe sodisfatta se avessimo $-\sqrt{b}=2\sqrt{xy}$; ma anche qui la difficoltà sparisce, convenendo che i radicali siano tutti positivi.

105. Osservazione II. Dovendo transformare $\sqrt{a-\sqrt{b}}$, si porrebbe

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y},$$

ossia

$$a-\sqrt{b}=x+y-2\sqrt{xy},$$

che è sodisfatta se

$$a=x+y,$$
$$\sqrt{b}=2\sqrt{xy};$$

equazioni che non differiscono dalle (3). x e y hanno dunque i medesimi valori che nel caso precedente, e si ha

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

106. Osservazione III. Per sodisfare all' equazione

$$(2)\qquad a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy},$$

abbiamo posto (3)

$$a=x+y,$$
$$\sqrt{b}=2\sqrt{xy},$$

ed è evidente che queste due equazioni sono sufficienti perchè sia verificata la proposta; ma si può anche dimostrare che sono necessarie, quando si voglia che a, b, x e y siano razionali.

In generale, se abbiamo

$$(1)\qquad a+\sqrt{b}=a'+\sqrt{b'};$$

a, b, a' e b' essendo razionali, bisogna che a e b siano rispettivamente eguali ad a' e b'. Si deduce infatti dalla (1)

$$\sqrt{b} = a' - a + \sqrt{b'},$$

e inalzando i due membri a quadrato,

$$b = (a'-a)^2 + b' + 2(a'-a)\sqrt{b};$$

il primo membro è commensurabile, il secondo non sarebbe se non fosse $a' = a$; dunque a deve essere eguale ad a', e per conseguenza anche b a b'. Per applicare questo risultato alla equazione (2) basta sostituire $x+y$ ad a' e $4xy$ a b', perchè $2\sqrt{xy} = \sqrt{4xy}$.

Alcuni esempi di equazioni simultanee di grado superiore al primo.

107. La risoluzione delle equazioni simultanee, è una delle quistioni più complicate dell' algebra. Non vogliamo entrare qui nella teorica generale, ma tratteremo soltanto alcuni casi semplicissimi.

Si possono risolvere due equazioni a due incognite, una di primo e una di secondo grado.

Infatti; sia dato il sistema

$$(1) \qquad ax + by = c,$$

$$(2) \qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o.$$

Dalla (1) si deduce

$$(3) \qquad y = \frac{c - ax}{b}.$$

Sostituendo questo valore nella equazione (2), otterremo un equazione di secondo grado in x, da cui si ricaveranno per questa incognita due valori, a ciascuno dei quali corrisponderà un valore di y dato dalla formula (3).

108. Risolveremo anche alcuni sistemi semplici, per fare conoscere diversi artifizi spesso usati.

1°. Sia il sistema

$$x^2y+y^2x=30,$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6};$$

o anche, mandando via i denominatori della seconda,

$$xy(x+y)=30,$$
$$6(x+y)=5xy.$$

Considerando xy, e $x+y$ come due incognite u e v, avremo

$$uv=30,$$
$$6v=5u.$$

La seconda dà $v=\frac{5}{6}u$; sostituendo questo valore nella prima, essa diviene

$$\frac{5}{6}u^2=30,$$

ossia

$$u^2=36,$$
$$u=\pm 6;$$

onde si conclude

$$v=\pm 5.$$

Bisogna dare ad u e a v lo stesso segno, perchè $v=\frac{5}{6}u$.

Prendendo i valori $u=6$ $v=5$, abbiamo

$$x+y=5,$$
$$xy=6,$$

onde si deducono per x e y i valori 2 e 3.

Prendendo $v=-5$ $u=-6$, abbiamo

$$x+y=-5,$$
$$xy=-6,$$

onde per x e y i valori -6 e 1.

2°. Sia anche il sistema

$$\frac{4}{y^2}+\frac{4+y}{y}=\frac{8+4y}{x}+\frac{12y^2}{x^2},$$
$$4y^2-xy=x.$$

La prima, mandando via i denominatori, diviene

$$4x^2+(4+y)yx^2=(8+4y)y^2x+12y^4,$$

o anche

$$x^2(2+y)^2-4xy^2(2+y)+4y^4=16y^4.$$

Poichè il primo membro è il quadrato di $x(2+y)-2y^2$, questa equazione può scriversi

$$(x(2+y)-2y^2)^2=(4y^2)^2,$$

ed equivale alle due, comprese nella equazione

$$x(2+y)-2y^2=\pm 4y^2.$$

Dunque si possono sostituire al sistema proposto i due seguenti

$$x(2+y)-2y^2=4y^2;\quad x(2+y)-2y^2=-4y^2;$$
$$4y^2-xy=x:\quad 4y^2-xy=x:$$

che si risolveranno senza difficoltà, ricavando i valori di x dalle seconde e sostituendoli nelle prime.

109. Alcuni problemi sono resi molto più semplici per una scelta conveniente dell'incognita. Eccone un esempio:

Trovare quattro numeri in proporzione, conoscendo

la somma 2s *dei medi, la somma* 2s' *degli estremi, e la somma* 4q *dei quadrati dei quattro numeri.*

Prendendo per incognito il prodotto x dei medi, la loro somma essendo $2s$, essi saranno (96) radici dell'equazione

$$z^2-2sz+x=o,$$

e quindi eguali a

$$s+\sqrt{s^2-x},$$
$$s-\sqrt{s^2-x}.$$

Nello stesso modo si troverà che gli estremi sono

$$s'+\sqrt{s'^2-x},$$
$$s'-\sqrt{s'^2-x}.$$

Facendo la somma dei quadrati di queste quattro espressioni, si trova $4s^2+4s'^2-4x$; l'equazione del problema sarà dunque

$$4s^2+4s'^2-4x=4q;$$

dalla quale si dedurrà il valore di x, e quindi i quattro termini della proporzione, che saranno

$$s'+\sqrt{q-s^2},\quad s+\sqrt{q-s'^2},\quad s-\sqrt{q-s'^2},\quad s'-\sqrt{q-s^2}.$$

È naturale il prendere per incognito il prodotto dei medi, perchè questo prodotto, per ogni proporzione, non ha che un solo valore. Cercando di determinare direttamente uno dei medi, si dovrebbero trovare tutti due collo stesso calcolo, perchè nulla li distingue nell'enunciato. L'equazione dunque sarebbe di secondo grado.

110. Daremo anche la soluzione del problema seguente:

Trovare una proporzione, conoscendo la somma 4s *dei suoi termini, la somma* 4q *dei loro quadrati e la somma* 4c *dei loro cubi.*

Siano a, b, c, d i quattro termini della proporzione.

Prendiamo per incognita la differenza $4x$ tra la somma degli estremi $a+b$ e quella dei medi $c+d$; sia y il prodotto degli estremi, avremo

$$a+b+c+d=4s,$$
$$a+b-(c+d)=4x;$$

onde si deduce

$$a+b=2s+2x,$$
$$c+d=2s-2x;$$

e poichè si ha

$$ab=y,$$
$$cd=y,$$

si ottengono facilmente (96) per a, b, c, d i valori

$$s+x+\sqrt{(s+x)^2-y},$$
$$s+x-\sqrt{(s+x)^2-y},$$
$$s-x+\sqrt{(s-x)^2-y},$$
$$s-x-\sqrt{(s-x)^2-y}.$$

La somma dei quattro quadrati facilmente si trova eguale a

$$8(s^2+x^2)-4y,$$

e la somma dei quattro cubi eguale a

$$16s(s^2+3x^2)-12sy;$$

onde le due equazioni

$$8(s^2+x^2)-4y=4q,$$
$$16s(s^2+3x^2)-12sy=4c,$$

le quali si risolveranno senza difficoltà.

Esercizi.

1°. Risolvere le equazioni

$$a^n x^m + b^m y^n = 2(ax)^{\frac{m}{2}}(by)^{\frac{n}{2}},$$
$$xy = ab.$$

2°. Data la somma q delle aree di due rettangoli, la somma a delle loro basi, e le aree p e p' di due rettangoli che abbiano la base dell'uno e l'altezza dell'altro: trovare questi rettangoli.

3°. Trovare una progressione geometrica, data la somma dei suoi termini, la somma dei loro quadrati e la somma dei loro cubi.

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni:

4°. $$\frac{xy}{z} = q, \quad \frac{xz}{y} = q', \quad \frac{yz}{x} = q''.$$

5°. $$x(y+z) = p, \quad y(x+z) = p', \quad z(x+y) = p''.$$

6°. $$2(ab+xy)+(a+b)(x+y) = 0,$$
$$2(cd+xy)+(c+d)(x+y) = 0.$$

7°. $$x+y = a, \quad x^4+y^4 = d^4.$$

8°. $$a^2-x^2 = 3xy,$$
$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(a-x) = 3(x+y)\sqrt{x}.$$

9°. $$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{61}{\sqrt{xy}} + 1,$$
$$\sqrt[4]{x^3y}+\sqrt[4]{xy^3} = 78.$$

10°. $$y\sqrt{(a-x)(x-b)}+x\sqrt{(a-y)(b-y)}$$
$$= 2\left[b\sqrt{(a-x)(a-y)}+a\sqrt{(x-b)(b-y)}\right],$$
$$xy = 4ab.$$

11°. $$\frac{xyz}{x+y} = a, \quad \frac{xyz}{x+z} = b, \quad \frac{xyz}{y+z} = c.$$

12°. Trovare quattro numeri in progressione geometrica, date la loro somma e quella dei loro quadrati.

13°. Trovare un numero di due cifre, che diviso per il prodotto di queste due cifre, dia per quoziente $5\frac{1}{3}$, e che, diminuito di 9, divenga eguale al numero che si ottiene rovesciando le sue cifre.

14°. Trovare un numero di tre cifre, la seconda cifra del quale sia media proporzionale tra le altre due, e che stia alla somma delle sue cifre come 124 : 7, e aumentato di 594 divenga eguale al numero che si ottiene rovesciando le sue cifre.

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni:

15°.
$$x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{20}{x+y},$$
$$x^2+y^2=34.$$

16°.
$$(x+y)(xy+1)=18xy,$$
$$(x^2+y^2)(x^2y^2+1)=208x^2y^2.$$

17°.
$$\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=\left(\sqrt{y}\right)^{\frac{8}{3}},$$
$$\left(\sqrt{y}\right)^{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{8}{3}}.$$

18°.
$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a,$$
$$x+y+3\sqrt[3]{bxy}=b.$$

19°.
$$x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{2}}=a,$$
$$x^3+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}+x^3=b.$$

20°.
$$\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}=a,\qquad \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}=b.$$

21°. Trovare cinque numeri in progressione aritmetica, data la loro somma e il loro prodotto.

22°. Trovare quattro numeri in progressione aritmetica, data la loro somma e quella dei loro inversi.

Risolvere i sistemi di equazione:

23°. $$(1-x^2)^2(1+y^2)-(1+x^2)^2(1-y^2) = 4x^2\sqrt{1+y^4},$$
$$4xy = \sqrt{2(1-x^2)(1-y^2)}:$$

24°. $$(x^4+2bx^2y+a^2y^2)(y^4+2bxy^2+a^2x^2)$$
$$= 4(a^2-b^2)(b+c)^2x^2y^2,$$
$$x^3+y^3 = 2cxy.$$

25°. $$\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2} = m,$$
$$xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} = n.$$

CAPITOLO X.

TEORIA DELLE DISEGUAGLIANZE.

Definizioni.

111. Si dice che un numero A è maggiore di un altro numero B, quando la differenza $A-B$ è positiva. Secondo questa definizione, ogni numero positivo è maggiore di un numero negativo, e i numeri negativi sono tanto maggiori, quanto minore è il loro valore assoluto.

Esempio. Si ha

$$1 > -8,$$
$$-7 > -20,$$

e anche

$$0 > -4.$$

112. Quando una quantità che dipende da un numero incognito, deve essere maggiore o minore d' un' altra, l' espressione algebrica di questa condizione, che si chiama diseguaglianza, permette, in generale, di determinare dei limiti tra i quali l' incognita deve essere, o non deve essere compresa. Ne diamo in questo Capitolo alcuni esempi.

Principj generali relativi alle diseguaglianze.

113. In una diseguaglianza si può, senza cangiare le condizioni che esprime, aggiungere o togliere uno stesso numero ai due suoi membri, e per conseguenza, far passare

un termine da un membro nell'altro come in una equazione. Infatti, non si cangia la differenza di due numeri, aumentandoli e diminuendoli egualmente, e quindi la diseguaglianza che vi era tra loro rimane sempre la stessa e nello stesso senso, dopo questa addizione o sottrazione.

Così alla diseguaglianza

$$A > B$$

si può sostituire, qualunque sia m,

$$A+m > B+m.$$

114. Si può anche moltiplicare per uno stesso numero i due membri di una diseguaglianza, *purchè questo numero sia positivo*. Infatti le due diseguaglianze

$$A > B,$$
$$mA > mB,$$

sono equivalenti, quando m è positivo, poichè allora le differenze $mA-mB$ o $m(A-B)$ e $A-B$ hanno il medesimo segno.

Si può anche moltiplicare per un numero negativo i due membri di una diseguaglianza, ma bisogna allora cangiarne il senso. Così, indicando n un numero negativo, le diseguaglianze

$$A > B,$$
$$nA < nB$$

sono equivalenti, perchè la differenza $nA-nB$ o $n(A-B)$ è di segno contrario ad $A-B$.

Lo stesso può dirsi della divisione dei due membri di una diseguaglianza per uno stesso numero, perchè la divisione per m equivale alla moltiplicazione per $\frac{1}{m}$.

115. Non si possono inalzare a quadrato i due

membri di una diseguaglianza, altro che quando sono ambedue positivi. Abbiamo, per esempio,

$$4 > -7, \qquad -3 > -9,$$

e se inalziamo i due membri a quadrato, si ottengono le due diseguaglianze

$$16 > 49, \qquad 9 > 81,$$

che sono inesatte.

Non si può neppure estrarre la radice quadrata dai due membri di una diseguaglianza, se non si prendono i risultati positivamente. Così se

$$A^2 > B^2,$$

non sarà

$$A > B,$$

se A non è positivo.

116. Date due diseguaglianze nello stesso senso,

$$A > B,$$
$$C > D,$$

sommandole membro a membro, si ottiene una nuova diseguaglianza

$$A + C > B + D$$

che è esatta, ma che non può, come nelle equazioni, essere sostituita a una delle proposte; con altre parole, i due sistemi

$$A > B, \ C > D;$$
$$A > B, \ A + C > B + D$$

non sono equivalenti. Il secondo è una conseguenza del primo, ma non il primo del secondo.

Diseguaglianze di primo grado a una incognita.

117. Una diseguaglianza a un incognita, si dice di primo grado, quando può porsi sotto la forma

$$Ax+B > A'x+B',$$

A, B, A', B', rappresentando numeri dati. Per trovare i valori di x dai quali è sodisfatta, facciamo passare i termini da un membro nell'altro (**113**) in modo che prenda la forma

$$(A-A')x > B'-B.$$

Dividendo i due membri per $A-A'$, se ne dedurrà, secondo che questa differenza sarà positiva o negativa,

$$x > \frac{B'-B}{A-A'}, \quad \text{ovvero} \quad x < \frac{B'-B}{A-A'}.$$

Basta dunque prendere x maggiore o minore di un certo limite. Si può osservare che questo limite è precisamente il valore di x che renderebbe eguali i due membri.

118. Risolveremo, come applicazione, il problema seguente:

Due punti fissi A *e* B *si trovano a una distanza* 2c, *e un punto* M *si muove in modo che si ha sempre* AM+BM = 2a, *essendo* a *una retta data*, *maggiore di* c; *tra quali limiti si mantiene continuamente compresa la distanza* AM?

Supponiamo $AM > BM$; chiamando x e y le due rette AM e BM, si avrà, secondo l'enunciato,

$$(1) \qquad x+y = 2a.$$

Di più, affinchè il triangolo AMB sia possibile, è neces-

sario che il lato AB o $2c$ sia minore della somma degli altri due, e maggiore della differenza, cioè

(2) $$2c < x+y,$$

(3) $$2c > x-y.$$

La prima diseguaglianza (2) è una conseguenza necessaria della equazione (1), si può quindi sopprimere. Quanto alla seconda, sostituendovi a x il suo valore $2a-y$, diviene

$$2c > 2a-y-y,$$

ossia

$$2c > 2a-2y,$$

che equivale ad

$$y > a-c.$$

Aggiungendo ai due membri di questa diseguaglianza le quantità eguali e positive (113) $2a-y$ e x, abbiamo

$$2a > a-c+x,$$

ossia

$$x < a+c.$$

Dunque si deve avere

$$y > a-c, \quad x < a+c,$$

y rappresentando il minore, e x il maggiore dei due lati AM e MB, e i limiti tra i quali deve rimanere compreso AM, sono $a-c$ ed $a+c$. Può divenire eguale all'uno o all'altro; ma non minore del primo o maggiore del secondo.

Diseguaglianze di secondo grado.

119. Una diseguaglianza si dice di secondo grado quando può porsi sotto una delle due forme

$$Ax^2+Bx+C > o, \quad Ax^2+Bx+C < o,$$

A, B, C, rappresentando numeri dati, e x il numero incognito di cui si vogliono determinare i limiti.

Si possono dividere i due membri di questa dise-

guaglianza per A, cangiandone il senso (114), quando A è negativo, e si riduce così a una delle due forme

$$x^2+px+q>0, \quad x^2+px+q<0,$$

p e q rappresentando i rapporti $\frac{B}{A}$ e $\frac{C}{A}$, che possono essere numeri qualunque positivi o negativi.

Cerchiamo dunque per quali valori di x, il trinomio x^2+px+q è positivo o negativo.

Bisogna distinguere tre casi:

1°. *L'equazione* $x^2+px+q=0$ *ha due radici reali e diseguali.*

Chiamando x' e x'' queste due radici, si avrà (97) identicamente

$$x^2+px+q=(x-x')(x-x'').$$

Affinchè x^2+px+q sia positivo, è dunque necessario e sufficiente che $x-x'$ e $x-x''$ abbiano lo stesso segno, cioè che x sia o maggiore della maggior radice, o minore della minore.

Se x è compreso tra le due radici, le due differenze $x-x'$ e $x-x''$ hanno segni opposti, e x^2+px+q è negativo.

2°. *L'equazione* $x^2+px+q=0$ *ha le due radici eguali.*

Chiamando x' il loro valore comune, si ha (97)

$$x^2+px+q=(x-x')^2;$$

e poichè un quadrato non può essere mai negativo, la diseguaglianza

$$x^2+px+q<0,$$

è impossibile, e la diseguaglianza

$$x^2+px+q>0,$$

è sempre sodisfatta, purchè x sia differente da x'.

3°. *La equazione* $x^2+px+q=0$ *ha le radici imaginarie.*

In questo caso abbiamo

$$p^2-4q<0, \quad \text{ossia} \quad \frac{p^2}{4}-q<0.$$

Ora, si ha identicamente

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

x^2+px+q è dunque la somma di due parti positive, $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ e $q-\frac{p^2}{4}$, e non può nè annullarsi, nè divenire negativa.

La diseguaglianza

$$x^2+px+q>0,$$

è dunque sodisfatta sempre, e l' altra

$$x^2+px+q<0,$$

è impossibile

Esempio 1°. Sia la diseguaglianza

$$-3x^2-5x-\frac{4}{3}>0,$$

che equivale a

$$x^2+\frac{5}{3}x+\frac{4}{9}<0.$$

Eguagliando il primo membro a zero, si trovano per radici $-\frac{1}{3}$ e $-\frac{4}{3}$. Dunque affinchè sia negativo, è necessario che x sia compresa tra le due radici, cioè che sia

$$x<-\frac{1}{3}, \quad x>-\frac{4}{3}.$$

Esempio 2°. Sia la diseguaglianza

$$3x-x^2-7<o,$$

che equivale ad

$$x^2-3x+7>o.$$

Poichè le radici della equazione $x^2-3x+7=o$ sono imaginarie, la diseguaglianza proposta è sodisfatta qualunque sia x.

Discussione di alcuni problemi.

120. La teorica delle diseguaglianze, serve spesso, nella discussione dei problemi, a determinarne le condizioni di possibilità. Ecco alcuni esempi.

Problema 1°. *Determinare i lati di un triangolo rettangolo, di cui sono dati l'area* m², *e il perimetro* 2p.

Siano x e y i cateti del triangolo e z l'ipotenusa; avremo, per proposizioni ben cognite,

(1) $$z^2=x^2+y^2,$$

(2) $$x+y+z=2p,$$

(3) $$2m^2=xy.$$

Moltiplicando per 2 i membri della terza equazione, e sommandola colla prima, si ottiene

(4) $$z^2+4m^2=(x+y)^2.$$

La seconda porge

$$x+y=2p-z,$$

onde

(5) $$(x+y)^2=(2p-z)^2.$$

Eguagliando i due valori di $(x+y)^2$ dati dalle equazioni (4) e (5), si ha

$$(2p-z)^2=z^2+4m^2,$$

ossia, effettuando l'inalzamento a quadrato, e sopprimendo il termine z^2 che è comune,

$$4p^2-4pz=4m^2;$$

onde

$$z=\frac{p^2-m^2}{p}. \tag{6}$$

Da questo valore di z si deduce che una delle condizioni di possibilità del problema è $p^2>m^2$; ma questa condizione non basta, bisogna inoltre che si trovino per x e y valori positivi e reali. Ora, conosciuta z, le equazioni (2) e (3) fanno conoscere $x+y$ e xy, e danno

$$x+y=2p-z=\frac{p^2+m^2}{p},$$
$$xy=2m^2;$$

quindi x e y sono radici della equazione

$$u^2-\frac{p^2+m^2}{p}u+2m^2=o,$$

Questa equazione ha, evidentemente, due variazioni, quindi (99*) le sue radici sono ambedue positive, se sono reali. Basta dunque esprimere che sono reali, cioè che abbiamo

$$\frac{(p^2+m^2)^2}{4p^2}-2m^2>o,$$

ovvero, poichè p^2 è positivo,

$$(p^2+m^2)^2>8p^2m^2,$$

ed estraendo la radice quadrata dei due membri, che è permesso perchè sono positivi,

$$p^2+m^2>2pm\sqrt{2}. \tag{7}$$

Questa è la condizione cui debbono sodisfare p e m,

e se ne possono dedurre i limiti tra i quali può variare p, per un valore dato di m, o m per un valore di p. Otterremo contemporaneamente questi risultati, ponendo $\frac{p}{m}=r$. Infatti; dividendo per m^2 i due membri della disuguaglianza (7), essa diviene

$$r^2+1>2r\sqrt{2},$$

ovvero

$$r^2-2r\sqrt{2}+1>o;$$

onde si conclude (119) che r deve essere maggiore della maggiore, o minore della minore radice di $r^2-2r\sqrt{2}+1=o$, cioè o maggiore di $\sqrt{2}+1$, o minore di $\sqrt{2}-1$, Ma p essendo, come abbiamo veduto, maggiore di m, il rapporto $\frac{p}{m}$ non può essere minore di $\sqrt{2}-1$, che è minore di 1: bisogna dunque che sia maggiore di $\sqrt{2}+1$; e questa è la condizione che deve essere sodisfatta affinchè il problema sia possibile.

Osservazione. Il triangolo rettangolo che ha il perimetro eguale a $2p$, e l'area eguale a m^2, non è possibile altro che se $\frac{p}{m}$ è maggiore di $\sqrt{2}+1$, e quindi

$$m<\frac{p}{\sqrt{2}+1},$$
$$p>m(\sqrt{2}+1).$$

Queste disuguaglianze risolvono le questioni seguenti:

Qual'è la massima area di un triangolo rettangolo di perimetro dato?

Qual'è il minimo perimetro di un triangolo rettangolo di area data?

Problema 2°. *Inscrivere in una sfera di raggio* R

un cilindro, la cui superficie totale, compresevi le due basi, sia equivalente a un circolo di raggio dato, πm^2.

Chiamando x il raggio della base, e y l'altezza del cilindro, la geometria dà immediatamente le seguenti equazioni:

$$(1)\qquad x^2+\frac{y^2}{4}=R^2,$$
$$2\pi x^2+2\pi xy=\pi m^2;$$

ossia, sopprimendo il fattore π,

$$(2)\qquad 2x^2+2xy=m^2.$$

Dalla (2) si deduce

$$y=\frac{m^2-2x^2}{2x};$$

e sostituendo nella (1) questo valore, si ottiene

$$x^2+\frac{(m^2-2x^2)^2}{16x^2}=R^2,$$

e mandando via i denominatori e riducendo i termini simili,

$$20x^4-(4m^2+16R^2)x^2+m^4=o;$$

onde

$$(3)\qquad x=\sqrt{\frac{4m^2+16R^2\pm\sqrt{(4m^2+16R^2)^2-80m^4}}{40}}.$$

I segni dei coefficienti della equazione biquadratica che dà i valori di x^2, danno due variazioni; quindi se le radici sono reali, sono ambedue positive, e ciascuna dà un valore reale per x. Ma non basta che x sia reale e positiva, bisogna che sia anche y; quindi deve essere

$$m^2-2x^2>o,$$
$$x<\frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Il problema avrà dunque tante soluzioni, quanti sono i valori di x dati dalla (3), che sodisfanno a questa condizione.

Questi valori di x debbono essere reali; perciò basta, come abbiamo detto, che siano reali i valori di x^2, e quindi che sia sodisfatta la diseguaglianza

$$(4m^2+16R^2)^2 > 80m^4,$$

ossia

$$4m^2+16R^2 > 4\sqrt{5}\,.\,m^2,$$

cioè

$$m^2 < \frac{4R^2}{\sqrt{5}-1}. \tag{4}$$

Adempita questa condizione, cerchiamo in quali casi sodisfanno ambedue i valori di x; è necessario perciò che siano minori di $\frac{m}{\sqrt{2}}$; ed evidentemente basta esprimere che il maggiore sodisfa a questa condizione, e quindi si avrà la diseguaglianza

$$\frac{m^2}{2} > \frac{4m^2+16R^2+\sqrt{(4m^2+16R^2)^2-80m^4}}{40},$$

ossia, mandando via i denominatori e riducendo,

$$16(m^2-R^2) > \sqrt{(4m^2+16R^2)^2-80m^4}.$$

Se m è minore di R, questa diseguaglianza è impossibile, e quindi non possono esservi due soluzioni.

Se m è maggiore di R, essendo positivi i due membri della diseguaglianza, si possono inalzare a quadrato dopo averli divisi ambedue per 4, e così abbiamo

$$16(m^2-R^2)^2 > (m^2+4R^2)^2-5m^4,$$

ossia

$$20m^4-40m^2R^2 > o,$$

cioè

$$m^2 > 2R^2$$

Ma perchè x sia reale deve essere

$$m^2 < \frac{4R^2}{\sqrt{5}-1};$$

Dunque perchè vi siano due soluzioni, bisogna che m^2 sia compreso tra $2R^2$ e $\frac{4R^2}{\sqrt{5}-1}$.

Un calcolo facile dimostrerebbe che il più piccolo valore di x sodisfa sempre, e ogni qualvolta è reale dà una soluzione del problema.

Osservazione. Possiamo spiegare nel modo seguente i resultati ottenuti.

Esaminando i valori successivi per i quali passa la superficie di un cilindro inscritto in una sfera, quando il raggio della base aumenta da zero fino al raggio R della sfera, si vede che questa superficie, nulla in principio, aumenta fino a un limite che ci fa conoscere il calcolo, e che per quel che abbiamo trovato, è $\frac{4\pi R^2}{\sqrt{5}-1}$, poi diminuisce fino al valore $2\pi R^2$, che corrisponde al caso in cui, essendo nulla l'altezza, il cilindro si riduce alle sue basi che sono due grandi circoli. Ora, aumentando da zero fino al massimo, per diminuire dal massimo fino a $2\pi R^2$, è evidente che la superficie del cilindro passa due volte per tutti i valori compresi tra il massimo e $2\pi R^2$, e una sola volta per quelli minori di $2\pi R^2$.

Esercizi.

1°. Dedurre dalla diseguaglianza

$$\frac{x+a}{\sqrt{a^2+x^2}} > \frac{x+b}{\sqrt{b^2+x^2}},$$

i limiti tra i quali deve essere compresa x, essendo $a > b$.

2°. Condizioni necessarie perchè sia sodisfatta, qualunque siano x, y, la diseguaglianza

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F > o.$$

3°. Condizioni perchè sia sodisfatta qualunque siano x, y, z, la disuguaglianza

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2B''xy+2B'xz+2Bzy+2Cx+2C'y+2C''z+D > o.$$

4°. Condurre da un punto a una circonferenza una secante di una data lunghezza, e determinare le condizioni che debbono verificarsi affinchè sia possibile. Si suppone data la perpendicolare b abbassata da questo punto sopra un diametro del circolo, la distanza a del piede di questa perpendicolare dal centro, e il raggio R del circolo.

5°. In un circolo di centro C e di raggio R, la polare di un punto O è una perpendicolare a OC condotta da un punto X di questa retta, in modo che $CX \times OC = R^2$. Dati due circoli, trovare se un punto del loro piano può avere la medesima polare in ambedue.

6°. $\sqrt[m+n+p+q]{abcd}$ è compreso tra la maggiore e la minore delle espressioni $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$, $\sqrt[q]{d}$.

7°. Si ha sempre

$$a\alpha+a'\alpha'+a''\alpha''+\ldots < \sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\ldots} + \sqrt{\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\ldots},$$

a meno che

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{a'}{\alpha'} = \frac{a''}{\alpha''} \ldots$$

8°. $x^5+y^5-x^4y-y^4x$ è sempre positivo, qualunque siano i valori positivi di x e di y.

9°. $3(1+a^2+a^4)$ è maggiore di $(1+a+a^2)^2$, qualunque siano i valori positivi o negativi di a.

10°. abc è maggiore di $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ qualunque siano i numeri positivi a, b, c.

11°. $ab(a+b)+ac(a+c)+cb(b+c) > 6abc$ qualuque siano i valori positivi di a, b, c.

12°. Qualunque siano i valori positivi di a_1, a_2, a_3, ... a_n, dimostrare che

$$\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+a_3+ \dots +a_n) > \sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\sqrt{a_2a_3}+ \text{ec.}$$

CAPITOLO XI.

PROBLEMI DI MASSIMI E MINIMI.

---

121. Quando si vuol rendere una grandezza eguale a una quantità data, il problema spesso non è possibile che sotto alcune condizioni. Nel maggior numero di casi, bisogna che la quantità data sia compresa tra certi limiti che la discussione fa conoscere. Questi limiti determinano il maggiore e il minore dei valori che si possono attribuire alla grandezza considerata, cioè il *massimo* e il *minimo* di questa grandezza. Ne abbiamo veduti alcuni esempi nel capitolo precedente; qui ne aggiungiamo alcuni altri, unendovi la soluzione di alcune questioni di massimi o minimi che si risolvono in un modo meno diretto.

122. Problema I. *Dovendo la somma di due numeri* x *e* y *rimanere sempre eguale a* 2a, *tra quali limiti può variare il loro prodotto.*

Chiamato p il prodotto dei due numeri x e y, cerchiamo di determinarli; vedremo poi a quali condizioni deve sodisfare p, perchè il problema sia possibile.

Si ha

(1) $$x+y=2a,$$
(2) $$xy=p,$$

quindi x e y sono le radici della equazione

(3) $$z^2-2az+p=o,$$

e i loro valori sono reali (91), se

$$a^2>p.$$

Dunque a^2 è il limite che p non può superare, e quindi è il massimo del prodotto xy. Non vi è minimo.

Supponendo $p = a^2$, l'equazione (3) ha le due sue radici eguali ad a; il prodotto massimo corrisponde dunque al caso in cui x e y sono eguali ad a.

Dal risultato precedente se ne possono dedurre altri, che non si sarebbero potuti ottenere direttamente con eguale facilità.

123. Teorema. *Il prodotto di più numeri positivi, la somma dei quali è eguale a un numero dato, è massimo quando sono tutti eguali tra loro.*

I numeri considerati dovendo essere ciascuno minore della somma data, il loro prodotto non potrà superare ogni limite, e quindi avrà un massimo.

Sia $abc....l$ questo massimo; dico che questi fattori non potranno essere diseguali, perchè se due di essi, per esempio a e b, fossero diseguali, si potrebbe sostituire ad ambedue $\frac{a+b}{2}$, senza cangiare il valore della somma, e con questo si aumenterebbe il loro prodotto, poichè (122) la somma di due fattori essendo costante, il prodotto è massimo quando i fattori sono eguali. Dunque si avrebbe

$$abc....l < \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \, c....l,$$

e quindi $abc....l$ non sarebbe il prodotto massimo che si potesse fare con un medesimo numero di fattori che avessero la stessa somma.

124. Osservazione. Nel ragionamento precedente, abbiamo supposto che $a, b, c, ... l$, fossero numeri positivi. Se fosse altrimenti, il prodotto non avrebbe massimo, perchè, rimanendo la stessa la somma dei fattori, il loro valore assoluto potrebbe aumentare indefinitamente,

e se i fattori negativi fossero in numero pari, il prodotto sarebbe positivo e potrebbe divenire grande quanto si volesse.

125. Problema 2°. *Data la somma di due numeri positivi* x *e* y, *trovare il massimo del loro prodotto* $x^m y^n$, m *e* n *essendo numeri interi dati.*

Il massimo cercato corrisponde agli stessi valori di x e di y che danno il massimo di

$$\left(\frac{x}{m}\right)^m\left(\frac{y}{n}\right)^n,$$

perchè questa espressione non differisce dalla prima che per un fattore costante $\frac{1}{m^m n^n}$; ma questo nuovo prodotto può esser considerato come composto degli $m+n$ fattori

$$\frac{x}{m}, \frac{x}{m}, \ldots \frac{x}{m}, \frac{y}{n}, \frac{y}{n}, \ldots, \frac{y}{n},$$

la somma dei quali $m\frac{x}{m}+n\frac{y}{n}$, ossia $x+y$, è data. Dunque il prodotto sarà il massimo (123), se i fattori sono eguali, cioè se

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}.$$

Questa relazione permetterà di determinare x e y, poichè si conosce, per ipotesi, la somma $x+y$.

126. Problema 3°. *Dato il prodotto* p *di due numeri positivi, trovare il minimo della loro somma.*

La somma sarà minima, quando i due numeri saranno eguali a $\sqrt{p}$, e quindi la loro somma eguale a $2\sqrt{p}$.

Infatti, il massimo prodotto di due numeri che hanno per somma $2\sqrt{p}$ è eguale (122) a $\sqrt{p}.\sqrt{p}$, ossia

a p. Dunque se due numeri hanno una somma minore di $2\sqrt{p}$, il loro prodotto massimo sarà minore di p; e quindi perchè il prodotto di due numeri sia p, è necessario che la loro somma non sia minore di $2\sqrt{p}$; dunque $2\sqrt{p}$ è il minimo valore di questa somma.

127. Problema 4°. *Dato il prodotto* p *di* n *numeri positivi, trovare il minimo della loro somma.*

La somma sarà minima quando tutti i numeri saranno eguali a $\sqrt[n]{p}$, e quindi la loro somma eguale a $n\sqrt[n]{p}$.

Infatti; il massimo prodotto di n numeri che hanno per somma $n\sqrt[n]{p}$ è (123) $(\sqrt[n]{p})^n$ ossia p; e quindi se n numeri hanno una somma eguale a $n\sqrt[n]{p}$, il loro prodotto non potrà superare p. *A fortiori* se hanno una somma minore di $n\sqrt[n]{p}$, il loro prodotto sarà minore di p. Dunque perchè il prodotto di n numeri sia eguale a p, bisogna che la loro somma non sia minore di $n\sqrt[n]{p}$, e $n\sqrt[n]{p}$ è, quindi, il valore minimo di questa somma.

128. Problema 5°. *Dato il prodotto* $x^m y^n = p$, *trovare il minimo di* $x+y$.

Questo minimo corrisponderà al caso in cui $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$.

Siano, infatti, α e β due numeri tali che

$$\alpha^m\beta^n = p,$$
$$\frac{\alpha}{m}=\frac{\beta}{n},$$

Fra tutti i numeri x e y che hanno per somma $\alpha+\beta$ (125), α e β sono quelli che danno al prodotto $x^m y^n$ il massimo valore. Se dunque due numeri x e y hanno una somma minore di $\alpha+\beta$, il prodotto $x^m y^n$ sarà, *a fortiori*, minore di $\alpha^m\beta^n$, cioè di p. Dunque perchè $x^m y^n$ sia eguale a p, bisogna che $x+y$ sia almeno

eguale a $\alpha+\beta$, che, per conseguenza, sarà il suo valore minimo.

129. Osservazione. I tre problemi precedenti (126), (127), (128) sono, in qualche modo, reciproci di quelli risoluti al principio del Capitolo (122), (123), (125). Questa reciprocità tra alcuni problemi di massimo e minimo può essere formulata in modo generale, così:

Se, per un valore dato di una quantità B, un altra quantità A è massima *sotto determinate condizioni;* per un valore dato di A, B sarà minima *sotto le medesime condizioni*, purchè il valore massimo di A diminuisca quando il valore dato di B diminuisce.

Ammettiamo, infatti, che A_1 sia il massimo valore di A che possa conciliarsi col valore B_1 di B. *A fortiori* un valore di B minore di B_1 richiederebbe che A fosse minore di A_1, poichè, per ipotesi, il massimo di A è tanto più piccolo quanto minore è il valore di B. Il valore A_1 di A non può perciò corrispondere che a valori di B al meno eguali a B_1, e, con altre parole, B_1 è il minor valore di B che corrisponda ad $A=A_1$, cioè il minimo di B corrispondente al valore A_1 di A.

Esempi. Si dimostra in geometria:

Che la circonferenza è la curva che, con una lunghezza data, contiene l'area massima:

Che il triangolo equilatero è il triangolo che, con un perimetro dato, contiene l'area massima.

Se ne deduce:

Che la circonferenza è la curva che, con un'area data, ha il minimo perimetro;

Che il triangolo equilatero è il triangolo che con un'area data ha il minimo perimetro.

130. Applichiamo ora il metodo generale, col quale abbiamo risoluto il problema 1°, a problemi più composti.

PROBLEMA 6°. *Trovare tra quali limiti può variare l' espressione*

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'},$$

quando x *prende tutti i valori possibili.*

Poniamo

$$(1)\qquad \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=m.$$

Se ne deduce

$$x^2(a-ma')+x(b-b'm)+c-c'm=o,$$

$$x=\frac{b'm-b\pm\sqrt{(b'm-b)^2-4(a-a'm)(c-c'm)}}{2(a-a'm)}.$$

Affinchè x sia reale, deve essere

$$(b'm-b)^2-4(a-a'm)(c-c'm)>o,$$

cioè

$$(2)\quad m^2(b'^2-4a'c')+m(4ac'+4a'c-2bb')+b^2-4ac>o.$$

Qui distingueremo tre casi:

1°. $b'^2-4a'c'$ positivo.

In questo caso il trinomio che forma il primo membro della diseguaglianza sarà positivo, cioè avrà lo stesso segno del primo termine, per tutti i valori di m non compresi tra le radici dell' equazione ottenuta eguagliandolo a zero. Dunque, se queste radici sono reali e le indichiamo con m' e m'', m potrà prendere tutti i valori tranne quelli compresi tra m' e m''; se sono imaginarie, potrà prendere qualunque valore senza eccezione veruna.

2°. $b'^2-4a'c'$ negativo.

In questo caso, il trinomio che forma il primo membro della diseguaglianza sarà positivo, cioè di segno contrario al suo primo termine, per i valori di m

compresi tra le radici dell' equazione ottenuta eguagliandolo a zero. È impossibile che queste radici non siano reali, perchè allora m non potrebbe prendere alcun valore, ed è evidente, per la equazione (1), che questo non può ammettersi.

3°. $b'^2-4a'c'$ nullo.

La diseguaglianza diviene allora di primo grado, e la risolveremo come abbiamo detto (117).

Problema 7°. *Essendo* x *e* y *due variabili legate tra loro da una equazione di secondo grado*

$$(1) \qquad ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=o,$$

trovare i valori estremi che può prendere una di esse, per esempio x.

Risolvendo l' equazione (1) rapporto a y, si ottiene

$$(2) \quad y=-\frac{bx+d}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{(bx+d)^2-4a(cx^2+ex+f)}.$$

La quantità sotto il radicale, è un trinomio di secondo grado a cui possiamo sostituire mx^2+nx+p; m, n, p, essendo quantità cognite, delle quali facilmente si formano le espressioni, cioè:

$$m=b^2-4ac, \quad n=2bd-4ae, \quad p=d^2-4af,$$

onde avremo

$$(3) \qquad y=-\frac{bx+d}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{mx^2+nx+p}.$$

Ora è evidente che si potranno dare ad x soltanto quei valori che rendono mx^2+nx+p positivo, perchè, altrimenti, y risulterebbe imaginario; x deve dunque sodisfare alla diseguaglianza

$$(4) \qquad mx^2+nx+p>o,$$

e abbiamo veduto (119) come si può, nei differenti casi, dedurre dalla diseguaglianza (4) i limiti tra i quali x deve essere o non essere compresa.

PROBLEMA 8°. *Trovare tra quali limiti può variare il polinomio*

$$(1)\qquad Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F,$$

quando le variabili x *e* y *prendono tutti i valori possibili.*

Poniamo $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=m$; se in questa equazione si considera y come incognita, si ricava

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(Bx+D)^2-4A(Cx^2+Ex+F-m)}.$$

Affinchè un valore di m sia compatibile con valori reali di x e di y, bisogna che per questo valore di m, con una scelta conveniente del valore di x, si abbia

$$(Bx+D)^2-4A(Cx^2+Ex+F-m)>o,$$

cioè

$$(2)\quad (B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF+4Am>o,$$

Distingueremo anche qui tre casi.

1°. B^2-4AC positivo.

In questo caso la diseguaglianza (2) è sempre possibile, perchè un trinomio di secondo grado può sempre prendere il segno del suo primo termine; non vi sono limiti per m.

2°. B^2-4AC negativo.

In questo caso, la diseguaglianza (2) è possibile quando il primo membro eguagliato a zero dà valori reali per x, e impossibile nel caso contrario. Infatti sappiamo che un trinomio di secondo grado non può divenire di segno contrario al suo primo termine, altro che

quando si annulla per valori reali della variabile. Si deve dunque scegliere m in modo che l'equazione

$$(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF+4Am=o,$$

abbia le radici reali. Questa condizione è espressa dalla diseguaglianza

$$(BD-2AE)^2>(B^2-4AC)(D^2-4AF+4Am);$$

che è di primo grado in m, e quindi sappiamo (117) ricavarne il limite di questa quantità.

3°. B^2-4AC nullo.

La diseguaglianza (2) diviene di primo grado in x, e quindi possibile per qualunque valore di m, e questa quantità non avrà limite.

Ma se accadesse che anche $BD-2AE$ fosse nullo, la diseguaglianza diverrebbe

$$D^2-4AF+4Am>o,$$

e se ne dedurrebbe un limite per m, cioè

$$m>\frac{4AF-D^2}{4A} \text{ oppure } m<\frac{4AF-D^2}{4A},$$

secondo che A fosse positivo o negativo.

PROBLEMA 9°. *Rimanendo sempre la somma* $x+y=2a$, *tra quali limiti può variare* x^3+y^3?

Rappresentando x^3+y^3 con s^3, e cercando di determinare x e y, troveremo a quali condizioni deve sodisfare s^3, affinchè il problema sia possibile. Abbiamo

(1) $$x+y=2a,$$
(2) $$x^3+y^3=s^3;$$

si deduce dalla (1)

$$y=2a-x,$$

e, sostituendo questo valore nella (2),

(3) $$x^3+(2a-x)^3=s^3,$$

ossia

(4) $$x^3+8a^3-12a^2x+6ax^2-x^3=s^3,$$

e sopprimendo i termini x^3 e $-x^3$ che si distruggono, e ordinando rapporto ad x

(5) $$6ax^2-12a^2x+8a^3-s^3=o,$$

onde

(6) $$x=a\pm\frac{1}{12a}\sqrt{144a^4-24a(8a^3-s^3)},$$

e, affinchè il problema sia possibile, bisognerà che sia

$$144a^4-24a(8a^3-s^3)>o;$$

se a è positivo, possiamo sopprimere il fattore $24a$, e si ottiene

$$6a^3-8a^3+s^3>o,$$

onde

$$s^3>2a^3;$$

questa è dunque l'unica condizione che deve essere sodisfatta da s^3, perchè, essendo reale x, la equazione (1) darà sempre un valore reale per y.

Il minimo richiesto è quindi $2a^3$.

È facile a vedersi che l'ipotesi $s^3=2a^3$, introdotta nella equazione (6), dà $x=a$, e che quindi si ha anche $y=a$. La somma x^3+y^3 è dunque minima quando x e y sono eguali tra loro.

Esercizi.

1°. Data la somma $x+y$, estendere la regola, che dà il massimo del prodotto $x^m y^n$, al caso di m e n frazionari.

2°. Minimo di $x^m+\frac{1}{x^n}$, quando m e n sono interi o frazionari e x positivo.

3°. Dato il prodotto $x^m y^n$, $x^{m'} y^{n'}$ ha massimo o minimo, se m, n, m' e n' sono numeri dati, e x e y soggetti alla condizione di essere positivi?

4°. Tra i parallelepipedi rettangoli di egual superficie, qual è quello che ha il massimo volume, e tra quelli di egual volume, qual è quello di minima superficie?

5°. Qual è la zona sferica, a una sola base, che contiene il massimo volume, tra quelle di egual superficie, e la zona di minima superficie tra quelle di egual volume?

6°. Qual è il massimo cilindro inscritto in una sfera data, e tra i cilindri di egual volume, quello che è inscritto nella minima sfera?

7°. Valore minimo di $\frac{tang\, 3a}{tang^3 a}$ quando a varia da 0 a $30°$.

8°. Due corpi di massa m e m' animati nello stesso senso dalle velocità v e v', si urtano. Trovare le velocità che prenderanno dopo l'urto, ammesso che la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando ciascuna delle masse per il quadrato del cangiamento della rispettiva velocità, sia la minima.

9°. Si segnano sopra una retta n punti equidistanti, che si numerano 1, 2, 3, ..., n. Trovare sulla medesima retta un punto tale che la somma dei quadrati delle sue distanze ai punti dati, moltiplicati per il numero corrispondente, sia la minima?

10°. Lo stesso problema, supponendo che i punti siano numerati 1, 3, 6, 10, ... $n\frac{(n+1)}{2}$.

11°. Dato un foglio di carta quadrato

ai quattro vertici del quale si tolgono i quadrati eguali che sono ombreggiati nella figura qui sopra, determinare il lato di questi quadrati in modo che la scatola la quale avesse

per fondo $mnpq$ e per faccie laterali i rettangoli restanti, che hanno tutti la stessa altezza, abbia il volume massimo.

12°. Minimo di $a^{x^2} b^{\frac{1}{x^2}}$, quando a e b sono numeri positivi dati.

Dati a e b, trovare i massimi delle seguenti espressioni:

13°. $$\frac{(x+a)(x-b)}{x^2}$$

14°. $$a+x+\frac{(a+x)^2}{a-x};$$

e il minimo di

15°. $$\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}.$$

16°. Quali valori si debbono dare a x e a y, affinchè il valore di a dedotto dalla equazione

$$x^2-2axy+y^2+2ax-2y+4a=0,$$

sia il minimo possibile?

17°. Date tre equazioni a due incognite

$$\begin{aligned} ax+by&=d,\\ a'x+b'y&=d',\\ a''x+b''y&=d'', \end{aligned}$$

esiste un numero infinito di fattori λ, λ', λ'' tali che moltiplicando la prima equazione per λ, la seconda per λ', la terza per λ'', e sommando i resultati si abbia un equazione

$$x=\lambda d+\lambda' d'+\lambda'' d''.$$

Trovare i fattori λ, λ', λ'', che sodisfacendo a questa condizione, rendono la somma $\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2$ la più piccola possibile.

CAPITOLO XII.

DIVISIONE DEI POLINOMI.

—

Divisione dei monomi.

131. Per dividere due monomi uno per l'altro, nel maggior numero dei casi, bisogna limitarsi a scrivere il dividendo sopra al divisore, separandoli con una linea orizzontale.

Esempio. La divisione di a^3b per c^2d dà per quoziente

$$\frac{a^3b}{c^2d},$$

ed è impossibile rendere più semplice questo risultato, finchè a, b, c e d restano indeterminati.

132. Qualche volta dopo avere indicata così l'operazione, si trovano dei fattori comuni ai due termini, e si possono sopprimere.

Esempio. Si debba dividere $40a^4bcf^3h^4$ per $35f^2g^4h^2b^2$; il quoziente

$$\frac{40a^4bcf^3h^4}{35f^2g^4h^2b^2}$$

può rendersi più semplice; basta sopprimere i fattori 5, b, h^2, f^2 comuni ai due termini, e si ha

$$\frac{8a^4cfh^2}{7g^4b}.$$

Osservazione. Quando una frazione con i termini monomi è stata ridotta alla più semplice espressione, non deve più contenere nessuna lettera eguale nei due

termini, perchè altrimenti si potrebbe sopprimere in ambedue tante volte, quante si trova nel termine in cui comparisce col minore esponente. È evidente che ogni frazione ridotta alla più semplice espressione dovrà contenere ciascuna lettera nel termine in cui aveva l'esponente maggiore, coll'esponente eguale alla differenza degli esponenti che aveva nei due termini. Per esempio, se una lettera a è nel dividendo coll'esponente m e nel divisore coll'esponente n, se $m > n$, comparirà nel quoziente ridotto, soltanto nel numeratore, coll'esponente $m-n$, e se $n > m$, comparirà soltanto nel denominatore, coll'esponente $n-m$.

133. La convenzione fatta relativamente agli esponenti negativi (37) ci permette di enunciare la regola di questa operazione con maggior semplicità nel modo seguente:

Per avere il quoziente di due monomi ridotto alla più semplice espressione, si sottraggono gli esponenti che le lettere eguali hanno nel divisore da quelli che hanno nel dividendo, e il risultato è l'esponente che avranno le lettere nel quoziente, che non avrà più forma frazionaria.

Esempio. Si debba dividere $a^7b^5cd^2$ per $a^5c^4d^3$, il quoziente sarà $a^2b^5c^{-3}d^{-1}$.

Delle divisioni dei polinomi, che possono effettuarsi.

134. In molti casi, per indicare la divisione dei polinomi, non si fa altro che separarli con una linea orizzontale, ed è impossibile di trasformare l'operazione in altre più semplici.

Quando però il dividendo e il divisore contengono una stessa lettera, si può, *qualche volta*, porre il quoziente sotto la forma di un nuovo polinomio. Qui suppor-

remo che i polinomi siano ordinati secondo le potenze decrescenti di una medesima lettera, e cercheremo, *se è possibile*, di rappresentare il loro quoziente con un polinomio ordinato per la medesima lettera; questo si chiama *effettuare la divisione.*

La regola della divisione si fonda sui teoremi seguenti:

135. Teorema 1°. *Se due polinomi sono ordinati per le potenze decrescenti di una stessa lettera, e il quoziente della loro divisione è eguale a un polinomio ordinato nello stesso modo, il primo termine di questo quoziente è il quoziente della divisione del primo termine del dividendo per il primo termine del divisore.*

Il quoziente moltiplicato per il divisore deve riprodurre il dividendo; ora, il primo termine del prodotto di due polinomi deriva, senza riduzione (26), dai prodotto dei loro primi termini. Dunque il primo termine del dividendo è il prodotto del primo termine del quoziente per il primo termine del divisore, e quindi il primo termine del quoziente risulta dalla divisione del primo termine del dividendo per il primo del divisore.

Si può osservare (24) che il primo termine del quoziente sarà positivo o negativo secondo che il primo termine del dividendo e il primo termine del divisore avranno segni eguali o differenti.

136. Teorema 2°. *Moltiplicando il divisore per il primo termine del quoziente, e sottraendo il prodotto dal dividendo, si otterrà un resto che, diviso per il divisore, darà per risultato l' insieme degli altri termini del quoziente.*

Il dividendo essendo uguale al prodotto del divisore per il quoziente, se si toglie da esso il prodotto del divisore per un termine del quoziente, il resto sarà il prodotto del divisore per la somma degli altri termini del

quoziente, questa somma sarà, quindi, il quoziente della divisione di questo resto per il divisore.

137. I due precedenti teoremi permettono di fare una divisione qualunque, perchè danno il modo di trovare il primo termine del quoziente, e riducono la ricerca di tutti gli altri a una nuova divisione. Gli stessi teoremi applicati a questa nuova divisione permettono di trovare il primo termine del nuovo quoziente, cioè il secondo del quoziente cercato, e di ridurre la ricerca dei seguenti a una terza divisione, e così di seguito.

138. Osservazione. I ragionamenti precedenti suppongono, essenzialmente, che il quoziente possa esprimersi con un polinomio. Ma è facile accorgersi che il processo al quale conducono mostrerà sempre se realmente è così. La condizione necessaria e sufficiente è che ogni termine del quoziente moltiplicato per il divisore dia un prodotto eguale precisamente al dividendo parziale da cui è derivato. 1°. Questa condizione è necessaria, perchè dopo aver trovati tutti i termini del quoziente, e sottratti successivamente dal dividendo i prodotti di ciascuno di essi per il divisore, si deve trovare un resto nullo. 2°. Questa condizione è sufficiente, perchè se è sodisfatta, il dividendo è eguale alla somma dei prodotti del divisore per i termini trovati in quoziente, poichè, sottraendo successivamente questi prodotti, non resta nulla.

Nel caso in cui le operazioni non devono mai finire, importa di esaminare come potremo assicurarsi di ciò, e a qual punto saremo in grado di affermare che nessun polinomio potrà rappresentare il quoziente. Osserviamo perciò che quando una divisione può effettuarsi, essendo il dividendo il prodotto del divisore per il quoziente, l' ultimo termine del dividendo è il prodotto dell' ultimo termine del divisore per l' ultimo del quoziente.

Onde si potrà determinare immediatamente l' ultimo termine del quoziente, dividendo l' ultimo termine del dividendo per l' ultimo del divisore. Quando dunque, formando i termini successivi del quoziente, se ne troverà uno di grado minore del termine così calcolato, si potrà affermare che l' operazione non ha fine.

139. Esempio 1°. Si debba dividere

$$x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1 \text{ per } x^2+x-1:$$

si scriverà il divisore alla destra del dividendo, separandoli con una linea verticale, nel modo seguente:

$$\begin{array}{r|l} x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1 & x^2+x-1 \\ \hline 5x^4+5x^3-4x^2+x-1 & x^3+5x^2+1. \\ x^2+x-1 & \\ 0 & \end{array}$$

Il primo termine del quoziente è x^3, quoziente della divisione di x^5 per x^2.

Si moltiplica il divisore per x^3, e si sottrae il prodotto dal dividendo, sottraendo ogni termine del prodotto, dal termine di grado eguale, appena ottenuto nel fare la moltiplicazione. Così, si trova per resto un primo dividendo parziale

$$5x^4+5x^3-4x^2+x-1.$$

Il secondo termine del quoziente è $5x^2$, quoziente della divisione di $5x^4$ per x^2.

Moltiplicando $5x^2$ per il divisore, e sottraendo il prodotto dal dividendo parziale, si ottiene un secondo dividendo parziale x^2+x-1.

Il terzo termine del quoziente è 1, quoziente della divisione di x^2 per x^2. Moltiplicando il divisore per 1, e sottraendo il prodotto dal dividendo parziale precedente,

si ottiene per resto 0. Dunque la divisione si fa esattamente e il quoziente è x^3+5x^2+1.

Esempio 2°. Dividere $x^5+5x^4+2x^3$ per x^2+x.

$$\begin{array}{r|l} x^5+5x^4+2x^3 & x^2+x \\ \hline 4x^4+2x^3 & x^3+4x^2. \end{array}$$

Il primo termine del quoziente è x^3, quoziente della divisione di x^5 per x^2. Moltiplicando x^3 per il divisore e sottraendo il prodotto dal dividendo, il resto è $4x^4+2x^3$; $4x^4$ diviso per x^2 dà per quoziente $4x^2$ che dovrebbe essere il secondo termine del quoziente. Ma, senza andare più avanti, si vede che l'operazione non potrà riuscire, perchè l'ultimo termine del quoziente (138) dovrebbe essere il quoziente della divisione di $2x^3$ per x, cioè $2x^2$, e quindi se esistesse un quoziente esatto, il termine $4x^2$ non potrebbe farne parte.

140. Osservazione. Le regole precedenti non suppongono in alcun modo che le potenze della lettera ordinatrice abbiano coefficienti numerici. Questi coefficienti possono essere letterali e anche composti di più termini, senza che vi sia nulla da cangiare nei ragionamenti e nelle regole.

Esempio. Dividere

$$x^6+(a^2-2c^2)x^4-(a^4-c^4)x^2-a^6-2a^4c^2-a^2c^4 \text{ per } x^2-a^2-c^2.$$

$$\begin{array}{r|l} x^6+(a^2-2c^2)x^4-(a^4-c^4)x^2-a^6-2a^4c^2-a^2c^4 & x^2-a^2-c^2 \\ \hline (2a^2-c^2)x^4-(a^4-c^4)x^2-a^6-2a^4c^2-a^2c^4 & x^4+(2a^2-c^2)x^2+a^4+a^2c^2 \\ (a^4+a^2c^2)x^2-a^6-2a^4c^2-a^2c^4 & \end{array}$$

Il primo termine del quoziente, è il quoziente della divisione di x^6 per x^2, ossia x^4. Moltiplicando x^4 per il divisore, e sottraendo il prodotto dal dividendo, resta

$$(2a^2-c^2)x^4-(a^4-c^4)x^2-a^6-2a^4c^2-a^2c^4.$$

Il secondo termine del quoziente è $(2a^2-c^2)x^2$, quoziente della divisione di $(2a^2-c^2)x^4$ per x^2. Moltiplicando il divi-

sore per $(2a^2-c^2)x^2$, e sottraendo il prodotto dal dividendo, resta

$$(a^4+a^2c^2)x^2-a^6-2a^4c^2-a^2c^4.$$

Il terzo termine del quoziente è $a^4+a^2c^2$, quoziente della divisione di $(a^4+a^2c^2)x^2$ per x^2. Sottratto il prodotto di $a^4+a^2c^2$ per il divisore dall' ultimo dividendo parziale, resta 0; dunque la divisione si fa esattamente, e il quoziente è

$$x^4+(2a^2-c^2)x^2+a^4+a^2c^2.$$

Esempio 3°. Si debba dividere

$$(a^4-b^4)x^4+(a^2b^3-a^3b^2-a^4b-b^4a)x^3+(a^2b^4-a^4b^2+a^3b^3+b^6+a^6)x^2$$
$$-(a^5b^2+b^5a^2)x+b^4a^4,$$

per

$$(a^2+b^2)x^2-a^2bx+a^4.$$

Il primo termine del quoziente è

$$\frac{(a^4-b^4)x^4}{(a^2+b^2)x^2}=(a^2-b^2)x^2;$$

continuando l'operazione, si vedrà che il calcolo di ogni termine del quoziente richiede la divisione di due polinomi algebrici ordinati rapporto ad a, il divisore essendo sempre a^2+b^2. Effettuando i calcoli, si troverà per quoziente

$$(a^2-b^2)x^2-ab^2x+b^4.$$

Delle divisioni che non si possono fare esattamente.

141. Quando due polinomi non hanno per quoziente un terzo polinomio, si dice che non sono divisibili uno per l'altro. Ma si può dare, in generale, all'espressione del loro rapporto, una forma più semplice di quella che risulterebbe dalla sola indicazione dell'ope-

razione. Infatti, si può dimostrare il teorema seguente:

Se due polinomi interi A *e* B *contengono una stessa lettera* x, *si può sempre porre il rapporto* $\frac{A}{B}$, *sotto la forma di un polinomio* Q *intero rapporto a* x, *aumentato di una frazione* $\frac{R}{B}$ *che ha il denominatore eguale a quello di* $\frac{A}{B}$, *e per numeratore un polinomio* R, *in* x *di grado inferiore a* B.

Applichiamo ai due polinomi A e B il metodo di divisione esposto (137), fino a che si trovi un resto di grado minore di quello di B, si otterranno in quoziente diversi termini che non conterranno x nel denominatore, perchè i dividendi parziali dai quali derivano sono tutti di grado non inferiore a B, e il loro primo termine contiene x a un grado più alto del primo termine di B.

Sia Q la somma dei termini ottenuti quando si giunge a un dividendo parziale R di grado inferiore a B. R è ciò che resta del dividendo A, dopo aver sottratti successivamente i prodotti di B per i diversi termini di Q; è dunque eguale ad $A-BQ$, e si ha

$$A=BQ+R,$$

onde

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B};$$

il quoziente $\frac{A}{B}$ è quindi posto sotto la forma enunciata.

142. Si può dimostrare ancora che la transformazione precedente non può farsi altro che in un sol modo; se infatti si avesse contemporaneamente

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B},$$

$$\frac{A}{B}=Q'+\frac{R'}{B},$$

sottraendo, si otterrebbe

$$o = Q - Q' + \frac{R - R'}{B},$$

ossia

$$R - R' = B(Q' - Q);$$

ora, questa ultima eguaglianza è impossibile, perchè il primo membro contiene x a un grado minore del secondo; poichè, essendo R e R' di grado inferiori a B, lo stesso è della loro differenza, e il prodotto di B per il polinomio $Q' - Q$ intero rapporto a x, è almeno di grado eguale a quello di B.

Osservazione. Se A fosse di grado minore di B, il quoziente Q sarebbe eguale a zero, e lo stesso dividendo sarebbe il resto.

Esempi. Si trova col metodo precedente,

$$\frac{x^5 - 2x^3 + x - 1}{x^2 - 3} = x^3 + x + \frac{4x - 1}{x^2 - 3},$$

$$\frac{2x^4 + 3x^2 - 5x + 7}{7x^3 + x - 1} = \frac{2}{7}x + \frac{\frac{19}{7}x^2 - \frac{33}{7}x + 7}{7x^3 + x - 1}.$$

Osservazione. Quando si applica al quoziente di due polinomi A e B la transformazione precedente, si dà al polinomio intero Q il nome di quoziente intero, e al numeratore R della frazione $\frac{R}{B}$ quello di *resto* della divisione.

143. Abbiamo dimostrato che se i due polinomi A e B sono ordinati rapporto a una stessa lettera x, il quoziente intero e il resto, non possono avere altro che una sola forma (142). Ma cangiando la lettera ordinatrice, gli stessi polinomi possono condurre a un nuovo

quoziente e a un nuovo resto. Consideriamo, per esempio, la frazione

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}.$$

Ordinando rapporto ad x, si trova per quoziente x^2-y^2, e per resto $2y^4$. Ordinandola poi rapporto a y, si troverebbe per quoziente y^2-x^2 e per resto $2x^4$, in modo che avremo

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=x^2-y^2+\frac{2y^4}{x^2+y^2},$$

$$\frac{y^4+x^4}{y^2+x^2}=y^2-x^2+\frac{2x^4}{y^2+x^2}.$$

Divisione dei polinomi ordinati secondo le potenze crescenti di una lettera.

144. In alcuni casi, invece di ordinare un polinomio secondo le potenze decrescenti della lettera ordinatrice, si dispongono i termini in modo che l' esponente di questa lettera vada aumentando dal primo termine fino all' ultimo. Si può fare la divisione di due polinomi ordinati in questo modo e trovare i diversi termini del quoziente, cominciando da quelli nei quali la lettera ordinatrice ha il minore esponente. La teorica è precisamente eguale a quella che abbiamo esposta per il modo ordinario, ma nel caso in cui il quoziente non è un polinomio, non si ottiene la medesima trasformazione del rapporto del dividendo al divisore.

Diamo un esempio di questo modo di fare l'operazione, riprendendo la divisione effettuata al paragrafo (139). Ordinando i due polinomi, secondo le potenze crescenti di x,

$$\begin{array}{r|l} -1+x-4x^2+4x^3+6x^4+x^5 & -1+x+x^2 \\ \hline -5x^2+4x^3+6x^4+x^5 & 1+5x^2+x^3 \\ -x^3+x^4+x^5 & \end{array}$$

diremo: poichè il dividendo è il prodotto del divisore per il quoziente, il termine che in esso contiene x al più basso esponente deriva senza riduzione dal prodotto dei termini analoghi del divisore e del quoziente, e quindi, il primo termine del quoziente è il quoziente del primo termine del dividendo per il primo termine del divisore.

Dimostreremo come abbiamo fatto (136) che sottraendo dal dividendo il prodotto del divisore per il primo termine del quoziente che sarà il quoziente di -1 diviso per -1, cioè 1, si ottiene un resto $-5x^2+4x^3+6x^4+x^5$, che diviso per il divisore darà i termini che devono completare il quoziente.

Il primo di questi, per le ragioni date sopra, sarà eguale al quoziente di $-5x^2$ diviso per -1, cioè a $5x^2$.

Sottraendo dal primo resto il prodotto di $5x^2$ moltiplicato per il divisore, si ha un secondo resto $-x^3+x^4+x^5$, che diviso per il divisore, darà gli altri termini del quoziente. Il primo di questi sarà x^3, quoziente di $-x^3$ diviso per -1.

Sottraendo il prodotto di x^3 moltiplicato per il divisore dal secondo resto, si trova una differenza nulla, e quindi l'operazione è terminata.

145.* Nell'esempio precedente, l'operazione ha un termine, e il resultato è identico con quello trovato nell'altro modo; ma non avverrebbe lo stesso, quando la divisione non potesse effettuarsi esattamente. Riprendiamo la divisione accennata (142)

$$\begin{array}{r|l} -1+x-2x^3+x^5 & -3+x^2 \\ \cline{2-2} x-\frac{1}{3}x^2-2x^3+x^5 & \frac{1}{3}-\frac{x}{3} \\ -\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{3}x^3+x^5 & \end{array}$$

i due primi termini ottenuti in quoziente sono $\frac{1}{3}$ e $-\frac{x}{3}$,

e non hanno alcun rapporto con quelli che ottenemmo ordinando i polinomi per le potenze decrescenti di x; il resto ha l'esponente minimo eguale a due se ci si arresta a questi termini, ma continuando l'operazione andrà continuamente aumentando. Da questo è facile dedurre in generale, in modo analogo a quello che abbiamo tenuto (141), il seguente teorema:

Il rapporto di due polinomi interi A *e* B, *quando non è un polinomio intero, può sempre porsi sotto la forma di un polinomio* Q *intero e di grado elevato quanto si vuole, rapporto a una lettera* x *contenuta in* B, *aumentato di una frazione* $\frac{R}{B}$, *che ha per numeratore un polinomio* R *che non contiene* x *inalzata a esponente minore del grado di* Q.

Esempio. Eseguendo nel modo indicato la divisione di 1 per $1-x$, si trova

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x},$$

dove n è un numero positivo qualunque.

Differenze e analogie tra la divisione aritmetica e la divisione dei polinomi.

146. I polinomi ordinati secondo le potenze di una lettera, presentano con i numeri interi alcune analogie, le quali sarà bene osservare. Un numero intero come 783214 esprime $7\times10^5+8\times10^4+3\times10^3+2\times10^2+1\times10+4$, e coincide col polinomio

$$7x^5+8x^4+3x^3+2x^2+x+4,$$

quando si ponga $x=10$. Non bisogna credere però che ogni questione d'aritmetica relativa a numeri interi sia puramente e semplicemente un caso particolare di una

questione d'algebra, nella quale siano sostituiti a questi numeri i polinomi corrispondenti.

Confrontiamo, per esempio, le due questioni seguenti:

Dividere

$$783214 \text{ per } 231.$$

Dividere

$$7x^5+8x^4+3x^3+2x^2+x+4 \text{ per } 2x^2+3x+1.$$

Le condizioni dei due problemi hanno tra loro delle differenze sostanziali, che non permettono di considerare il primo come un caso particolare del secondo.

1°. Il quoziente della divisione aritmetica dev' essere un numero intero, mentre che il quoziente della divisione algebrica può essere un polinomio intero rapporto a x, ma che abbia i coefficienti frazionari.

2°. Le cifre del quoziente e del resto, nella divisione aritmetica, devono essere minori di 10, mentre i coefficienti delle diverse potenze di x nella divisione algebrica non hanno alcun limite.

3°. Nella divisione aritmetica, il resto deve essere minore del divisore. Nella divisione algebrica deve essere di grado minore.

4°. Finalmente, i resultati ottenuti in algebra convengono a tutti i valori di x; non vi è condizione analoga in aritmetica.

Condizione perchè un polinomio sia divisibile per un binomio della forma $x-a$.

147. Dividendo per $x-a$ un polinomio ordinato per le potenze decrescenti di x, il resto, che dev' essere (**141**) di grado minore del divisore, non conterrà la lettera ordinatrice x. Questo ci servirà a calcolarlo senza effet-

tuare la divisione, e a dedurne le condizioni perchè questa riesca esattamente.

Sia X il polinomio dividendo, Q il quoziente e R il resto; avremo identicamente

$$X = Q(x-a)+R.$$

In questa eguaglianza, che ha luogo qualunque sia x, potremo supporre $x=a$; con questa ipotesi si annulla il prodotto $Q(x-a)$, quindi si deduce

$$X_a = R,$$

indicando con X_a ciò che diviene X, quando si sostituisce a ad x. R che non contiene x, non è cangiato da questa sostituzione, e il valore cercato di R è quindi eguale ad X_a. Dunque

Il resto della divisione di un polinomio per x—a *è il risultato della sostituzione di* a *ad* x *in questo polinomio.*

Onde la divisione non potrà farsi esattamente, altro che quando questa sostituzione dà un risultato eguale a zero.

148. Questa ultima proposizione è di grandissima importanza. Qui ne dedurremo soltanto alcune conseguenze.

1°. x^m-a^m è divisibile per $x-a$, perchè si annulla evidentemente per $x=a$.

Effettuando la divisione, si troverà per quoziente

$$(1) \qquad \frac{x^m-a^m}{x-a} = x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+ \dots +a^{m-1},$$

e si può verificare che i termini del secondo membro formano una progressione geometrica che ha per somma

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}.$$

2°. $x^m - a^m$ è divisibile per $x+a$ quando m è pari, perchè $x+a$ equivale a $x-(-a)$; ora $x^m - a^m$, per la sostituzione di $-a$ ad x, diviene $(-a)^m - a^m$, cioè zero, poichè, essendo m pari, $(-a)^m = a^m$.

Effettuando la divisione, si troverà

$$(2) \quad \frac{x^m - a^m}{x+a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \dots - a^{m-1};$$

questa formula suppone m pari.

3°. $x^m + a^m$ è divisibile per $x+a$ quando m è dispari, perchè $x+a$ equivale a $x-(-a)$, e sostituendo $-a$ ad x nel dividendo $x^m + a^m$, questo diviene $(-a)^m + a^m$, cioè 0, poichè m essendo dispari $(-a)^m$ è uguale a $-a^m$. Si trova, facendo la divisione

$$(3) \quad \frac{x^m + a^m}{x+a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \dots + a^{m-1};$$

questa formula suppone m dispari.

Osservazione. Le formule (2) e (3) non differiscono realmente da (1): se ne deducono ambedue sostituendo $-a$ al numero arbitrario a; si ottiene così la prima se m è pari, e la seconda se m è dispari.

Esercizi.

1°. $$1 + x^n + x^{2n} + \dots x^{np-n},$$

è divisibile per

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1},$$

se i numeri interi p e n sono primi tra loro.

2°. Se α rappresenta una radice primitiva del numero primo p, cioè se i numeri $1, \alpha, \alpha^2, \dots \alpha^{p-2}$ divisi per p, danno, in un ordine qualunque, resti eguali a tutti i numeri interi inferiori a p, il polinomio

$$1 + x + x^{\alpha} + x^{\alpha^2} + x^{\alpha^3} + \dots + x^{\alpha^{p-2}},$$

è divisibile per $1 - x^p$.

3°. α e p essendo numeri interi definiti come nell'esercizio precedente, se poniamo

$$x - x^{\alpha} + x^{\alpha^2} - x^{\alpha^3} + x^{\alpha^4} - \ldots\ldots - x^{\alpha^{p-2}} = M,$$

$M^2 \pm p$ sarà divisibile per $1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^{p-1}$.

4°. $$x^q y^r + y^q z^r + z^q x^r - x^r y^q - y^r z^q - z^r x^q,$$

è divisibile per il prodotto

$$(x-y)(x-z)(y-z),$$

5°. $x^p y^q z^r + y^p z^q x^r + z^p y^q x^r - x^p z^q y^r - z^p x^q y^r - y^p x^q z^r$,

è divisibile per lo stesso prodotto

6°. $(x^m-1)(x^{m-1}-1)(x^{m-2}-1)\ldots\ldots(x^{m-n+1}-1)$,

è divisibile per $(x-1)(x^2-1)\ldots\ldots(x^n-1)$.

7°. Se m è dispari, $(a+b+c)^m - a^m - b^m - c^m$ è divisibile per $(a+b)(b+c)(c+a)$.

8°. Quali sono le condizioni da verificarsi, perchè $x^m - a^m$ sia divisibile per $x^n - a^n$?

9°. Ridurre $\dfrac{x^{3n}}{x^n-1} - \dfrac{x^{2n}}{x^n+1} - \dfrac{1}{x^n-1} + \dfrac{1}{x^n+1}$, e verificare che la somma è un polinomio intero in x.

10°. Ridurre

$$\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2) + \frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) + \frac{a+c}{ac}(a^2+c^2-b^2),$$

e verificare che la somma non contiene denominatori.

11°. Rendere più semplici le espressioni

$$\frac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}.$$

12°. $$\frac{1}{\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)} + \dfrac{1}{(b-a)(b-c)(x+b)} + \dfrac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}}$$

CAPITOLO XIII.*

MASSIMO COMUN DIVISORE DEI POLINOMI.

—

Riduzione dei polinomi in fattori primi.

149*. Considereremo, in questo Capitolo, soltanto i polinomi razionali e interi (4), e diremo che un polinomio è divisibile per un altro, soltanto quando, oltre ad essere nullo il resto, anche il quoziente è un polinomio intero.

Se un polinomio intero non è divisibile per alcun numero intero nè per alcuna espressione algebrica intera e razionale, altro che per sè stesso e per la unità, diremo che è *primo*. Così, per esempio, $x-a$ è un binomio primo; x^2-b è primo, perchè $x+\sqrt{b}$ e $x-\sqrt{b}$, che ne sono gli unici fattori, non sono razionali; ma x^2-b^2 non è primo, perchè diviso per $x+b$ dà il quoziente $x-b$, ed $x+b$ e $x-b$ sono interi e razionali.

150*. Teorema 1°. *Ogni polinomio intero e primo* P, *che divide il prodotto* AB *di due polinomi interi, deve dividere l'uno o l'altro.*

Se A, B e P sono monomi, il teorema è dimostrato in aritmetica; perchè le lettere si possono riguardare come numeri primi, finchè rimangono nella loro generalità. Resta a dimostrarsi quando alcune di queste quantità, o tutte sono polinomi. Prima supponiamo che contengano una sola e medesima lettera x, ed esaminiamo successivamente tutti quattro i casi che possono darsi.

1°. A *è un polinomio*, B *e* P *sono numeri.*

Sia

$$A = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + \dots,$$

dove a, b, ... rappresentano numeri interi qualunque, e α, β, ... sono numeri interi e positivi. Moltiplicando A per il numero B, avremo

$$AB = Bax^{\alpha} + Bbx^{\beta} + \dots.$$

Poichè abbiamo supposto che questo prodotto sia divisibile per P, i coefficienti delle diverse potenze di x dovranno essere tutti divisibili per P, cioè Ba, Bb, ... dovranno essere divisibili per P; dunque se P non divide B dovrà dividere a, b, ..., e, dividendo questi numeri, dividerà evidentemente il polinomio A: dunque P dividerà o A o B.

2°. A *e* B *sono polinomi*, *e* P *è un numero.*

Supponiamo che P non divida nè A nè B, e chiamiamo A' la somma di tutti i termini che hanno i coefficienti divisibili per P, e A'' la somma di tutti gli altri; avremo $A = A' + A''$. Decomponendo B in modo analogo, otterremo $B = B' + B''$; e quindi

$$AB = (A' + A'')(B' + B'') = A'B' + A'B'' + B'A'' + A''B''.$$

Le prime tre parti di questa somma sono divisibili per P, perchè i coefficienti di A' e di B' sono divisibili per P. Dunque, dovrebbe aversi lo stesso per l'altra parte $A''B''$; e quindi tutti i coefficienti di questo ultimo prodotto dovrebbero essere divisibili per P. Ora siano ax^{α} e bx^{β} i termini di A'' e B'' che hanno il più alto esponente; il termine $abx^{\alpha+\beta}$ sarà quello che ha il più alto esponente e che non si riduce con alcun altro, in $A''B''$. Ora a e b non sono divisibili per P, che non divide alcun coefficiente di A'' e di B'', dunque anche ab, e in conseguen-

za $A''B''$ non potrà essere divisibile per P. Dunque è impossibile che P divida il prodotto AB, se non divide A o B.

3°. A *e* P *sono polinomi, e* B *è un numero.*

Sia Q il quoziente intero di AB diviso per P, avremo $AB = PQ$ e, chiamando $F, F', F'', ...$ i fattori primi di B,

$$AFF'F''.... = PQ,$$

Ora il primo membro di questa equazione è divisibile per F, e quindi anche il secondo PQ; ma F è primo, dunque dovrà dividere (2°) P o Q; P è un polinomio primo, e quindi non è divisibile per il numero F; dunque F dovrà dividere Q. Dividendo ambedue i membri per F, e rappresentando con Q' il quoziente di Q per F, si ottiene

$$AF'F''.... = PQ'.$$

Dimostreremo in modo eguale, che Q' deve essere divisibile per F', e chiamando Q'' il quoziente di Q' per F', si ha

$$AF''.... = PQ''.$$

Così seguitando arriveremo a una equazione

$$A = PQ_1,$$

nella quale Q_1 sarà una espressione intera, e quindi si conclude che A è divisibile per P.

4°. A, B *e* P *sono tutti polinomi.*

Supponiamo che A non sia divisibile per P, e sia di grado maggiore o eguale. Dividiamo A per P; otterremo un quoziente e un resto, che avranno, in generale, i coefficienti frazionari. Riducendoli tutti alla stesso denominatore, che indicheremo con M, il quoziente e il resto prenderanno la forma $\frac{Q}{M}$ e $\frac{R}{M}$, e Q ed R saranno poli-

linomi interi, R sarà di grado inferiore a P, e si avrà la relazione

$$A = \frac{PQ}{M} + \frac{R}{M},$$

Moltiplicando per MB e dividendo per P i due membri di questa equazione, si ha

$$M\frac{AB}{P} = QB + \frac{RB}{P};$$

dalla quale si deduce che affinchè AB sia divisibile per P, è necessario che lo sia anche RB.

Dividendo P per R e rappresentando con $\frac{Q_1}{M_1}$ e $\frac{R_1}{M_1}$ il quoziente e il resto, dove M_1 è il denominatore comune di tutti i loro coefficienti, avremo

$$M_1P = RQ_1 + R_1,$$

R_1 non potrà essere nullo, perchè altrimenti M_1P sarebbe divisibile per i divisori primi di R, che contengono x, e non possono dividere il numero M_1, e quindi (3°) P dovrebbe essere divisibile per i medesimi e perciò non sarebbe primo, come abbiamo supposto.

Moltiplicando per B e dividendo per P i due membri di questa equazione, otteniamo

$$M_1B = \frac{RB}{P}Q_1 + \frac{R_1B}{P};$$

onde si rileva R_1B divisibile per P.

Così seguitando si ottengono i resti successivi R_1, R_2, R_3, ..., i gradi dei quali continuamente vanno decrescendo, e siccome nessuno di essi può dividere P, arriveremo finalmente ad un resto R' che non conterrà x, e sarà un numero. Ora, abbiamo dimostrato che tutti i prodotti R_1B, R_2B, R_3B, ... debbono esser divisibili

per P, dunque anche l'ultimo $R'B$, e quindi (3° caso) B dovrà essere divisibile per P.

La dimostrazione che abbiamo data per il caso in cui i due fattori e il divisore abbiano i coefficienti numerici, è affatto simile quando i coefficienti sono polinomi, che contengono soltanto un'altra lettera y. I casi da esaminarsi sono quattro anche allora; soltanto bisogna supporre che quelle quantità che dianzi erano numeri, siano polinomi che contengono una sola lettera, per i quali abbiamo lo stesso teorema che si trovò in aritmetica per i numeri, e che serve di fondamento alla dimostrazione.

Come la proposizione relativa al caso in cui A, B, P, contengono una sola lettera, serve a dimostrare la medesima proposizione quando A, B e P sono polinomi che contengono due lettere, così la proposizione relativa a quest' ultimo caso, serve a dimostrarla allora che sono polinomi che contengono tre lettere, e così di seguito; e quindi il Teorema può riguardarsi dimostrato in generale.

151*. Teorema 2°. *Un polinomio intero non può essere ridotto in fattori primi altro che in un sol modo.*

Sia $ABCD$.... un prodotto di polinomi primi, e supponiamo che sia eguale a un altro prodotto di polinomi primi $abcd$..... Poichè il fattore a divide $abcd$...., dovrà dividere anche $ABCD$.... Ora se a fosse differente dai fattori A, B, C, D, ... primi, non potrebbe dividerne alcuno: non dividendo A nè B, non potrebbe dividere AB, non dividendo AB, nè C, non potrebbe dividere ABC; e così di seguito. Dunque è necessario che il fattore a sia eguale a qualcuno dei fattori A, B, C, D, ... Supponiamo $a = A$. Dividendo i due prodotti per A, i quozienti BCD.... bcd.... rimarranno eguali. Ripetendo il ragionamento precedente, si concluderà che b deve essere eguale a

qualcuno dei fattori di BCD.... Così seguitando, si dimostra che i due prodotti debbono necessariamente essere composti dei medesimi fattori primi inalzati ai medesimi esponenti, analogamente a quello che si trovò per i numeri interi nell'aritmetica (a).

152*. Da ciò che precede si deduce, precisamente come in aritmetica, il seguente teorema:

Affinchè un polinomio intero A *sia divisibile per un altro* B, *è necessario e sufficiente che tutti i fattori primi di* B *siano fattori primi anche di* A.

Massimo comun divisore di più polinomi interi.

153*. In varie ricerche d'algebra è necessario di sapere determinare il prodotto di tutti i fattori primi comuni a due o più polinomi interi, che si chiama il loro massimo comun divisore.

Per il massimo comun divisore dei monomi vale la regola dell'aritmetica, purchè si considerino le lettere come fattori primi. Per determinare, per esempio, il massimo comune divisore dei monomi $432a^4b^2x$ e $270a^3b^2x^3$, si prenderanno i fattori primi numerici comuni ai coefficienti 432 e 270, e le lettere comuni inalzate all'esponente minore che hanno nei due monomi: si otterrà così $54a^3b^2x$.

154.* Per avere tutti i fattori primi comuni a due polinomi A ed A' interi ordinati secondo le potenze decrescenti di x, si possono determinare separatamente quelli indipendenti da x, e quelli che contengono questa lettera. I fattori primi di A indipendenti da x, saranno comuni a tutti i coefficienti di A (150*); li determineremo fa-

(a) L'effettuazione della riduzione di un polinomio intero in fattori primi, che qui siamo obbligati ad omettere, si ritroverà nell'Algebra superiore, nella risoluzione del problema della *riduzione* delle equazioni (T.)

cilmente, se i coefficienti sono monomi, e chiameremo il loro prodotto d. Lo stesso faremo per A', e chiameremo d' il loro prodotto; avremo

$$A = dB, \quad A' = d'B',$$

dove B e B' rappresenteranno due polinomi, che non potranno avere comune nessun fattore indipendente da x.

Il massimo comune divisore D di d e di d' sarà, evidentemente, il prodotto di tutti i fattori primi indipendenti da x, comuni ad A e ad A'. Rimarrà ora da cercare il massimo comune divisore di B e di B'.

Supponiamo B di grado maggiore o eguale a B', e dividiamo B per B'. Siano Q il quoziente e R il resto; avremo

$$B - QB' = R,$$

e questa eguaglianza prova che il prodotto dei fattori primi comuni a B ed a B' è lo stesso di quello dei fattori comuni a B' e ad R.

Infatti, sia α un fattore di qualsivoglia grado in x, che comparisca inalzato alla potenza p in ambedue i polinomi B e B'; essendo essi divisibili per α^p, la somma $QB' + R$ e una delle sue parti QB' ammettono evidentemente questo fattore; e per conseguenza lo stesso avverrà dell' altra parte R.

Si vedrà egualmente che se B' e R ammettono p volte un fattore α, lo stesso accadrà di B.

S' intende che p può essere eguale ad uno.

Da questo ne segue che i fattori comuni a B ed a B' sono li stessi di quelli comuni a B' e ad R, e devono essere presi cogli stessi esponenti; quindi il massimo comune divisore di B e di B' è eguale a quello di B' e di R.

Si ridurrà in modo eguale la ricerca del massimo

comune divisore di B' ed R a quella del massimo comun divisore di R e del resto R' della divisione di B' per R; si continuerà così a sostituire ai polinomi proposti altri polinomi, i gradi dei quali andranno continuamente diminuendo, e quando arriveremo a una divisione che si farà esattamente, il divisore di quest' ultima operazione sarà il massimo comune divisore cercato.

Se si trova un resto indipendente da x prima d' incontrare una divisione che si faccia esattamente, i polinomi proposti non hanno fattori comuni che contengano x.

Osservazione. Cercando il prodotto dei fattori che contengono x, non si ha più riguardo a quelli che non contengono questa lettera, che sono già stati determinati. Si può dunque moltiplicare uno dei polinomi B, B', o uno dei resti ottenuti nella operazione, per un fattore qualunqne indipendente da x. Si approfitta spesso di questa osservazione per evitare l' introduzione di denominatori indipendenti da x. Basta moltiplicare i dividendi successivi per il coefficiente del primo termine del divisore, e questo non solo per i polinomi B, B', R, R'.... che servono successivamente di divisori, ma anche per i dividendi parziali che si presentano nel corso di ogni divisione.

Supponiamo, per esempio, che dividendo B per B' sia stato trovato in quoziente un certo numero di termini, l' insieme dei quali rappresenterò con Q_1.

Sia R_1 ciò che resta del dividendo dopo aver sottratto il prodotto di Q_1 per il divisore, avremo

$$B = Q_1B' + R_1,$$

e si dimostrerà come precedentemente che i fattori indipendenti da x, comuni a B ed a B' sono li stessi di quelli comuni a B' e ad R_1 e anche a kB' e ad R_1, essendo k in-

dipendente da x; dunque si può continuare la operazione dopo avere moltiplicato il dividendo parziale R_1 per k.

Per le stesse ragioni si può dividere ciascuno dei resti successivi prima di passarlo divisore, per il massimo fattore comune ai suoi coefficienti. Queste moltiplicazioni e divisioni cangiano i quozienti che successivamente si ottengono; ma non importa, perchè in queste operazioni i quozienti non servono a niente.

ESEMPIO 1°. Si debba determinare il massimo comune divisore tra i due polinomi

$$A=48a^2b^3x^4-120a^3b^3x^3+12a^4b^3x^2-12a^6b^3,$$
$$A'=48a^3bx^3-88a^4bx^2-64a^5bx-8a^6b.$$

Determino il massimo comun divisore d dei coefficienti di A, e quello d' dei coefficienti di A', e trovo $d=12a^2b^3$, $d'=8a^3b$. Il massimo comune divisore di questi due monomi è

$$D=4a^2b.$$

Ora divido A per d, e A' per d', per ottenere i due polinomi B e B' privi di fattori indipendenti da x, e trovo

$$B=4x^4-10ax^3+a^2x^2-a^4$$
$$B'=6x^3-11ax^2-8a^2x-a^3$$

Moltiplico B per il fattore 3, per ottener interi il quoziente e il resto della divisione di B pe B'; ed eseguo la divisione, moltiplicando i successivi d dendi parziali per i fattori che rendono i loro primi c icienti divisibili per il primo di B':

$$\begin{array}{l|l} 12x^4-30ax^3+3a^2x^2-3a^4 & 6x^3-1\;\;\;{}^2-8a^2x-a^3, \\ \quad -8ax^3+19a^2x^2+2a^3x-3a^4 & 2x-4 \\ \quad -24ax^3+57a^2x^2+6a^3x-9a^4 & \\ \qquad\qquad 13a^2x^2-26a^3x-13a^4. & \end{array}$$

Così trovo il primo resto, che dopo essere stato diviso per $13a^2$, che n' è il massimo fattore indipendente da x, diviene

$$x^2-2ax-a^2;$$

e per questo devo dividere B'. Effettuo la divisione, colle solite avvertenze per avere i quozienti e i dividendi parziali interi:

$$\begin{array}{r|l} 6x^3-11ax^2-8a^2x-a^3 & x^2-2ax-a^2 \\ \cline{2-2} ax^2-2a^2x-a^3 & 6x+a \\ 0 & \end{array}$$

Poichè il resto $x^2-2ax-a^2$ divide B', esso è il massimo comune divisore tra B e B', e moltiplicato per il massimo fattore independente da x, che abbiamo trovato eguale a $4a^2b$, dà il massimo comune divisore di A ed A',

$$4a^2bx^2-8a^3bx-4a^4b.$$

ESEMPIO 2°. Determiniamo anche il massimo comune divisore tra

$$x^7-3x^6+x^5-4x^2+12x-4$$

e

$$2x^4-6x^3+3x^2-3x+1.$$

Ecco il quadro delle operazioni:

$$\begin{array}{r|l} 2x^7-6x^6+2x^5-8x^2+24x-8 & 2x^4-6x^3+3x^2-3x+1 \\ \cline{2-2} & x^3-x \\ -x^5+3x^4-x^3-8x^2+24x-8 & \\ -2x^5+6x^4-2x^3-16x^2+48x-16 & \\ x^3-19x^2+49x-16 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-6x^3+3x^2-3x+1 & x^3-19x^2+49x-16 \\ \cline{2-2} 32x^3-95x^2+29x+1 & 2x+32 \\ 513x^2-1539x+513 & \\ x^2-3x+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-19x^2+49x-16 & x^2-3x+1 \\ -16x^2+48x-16 & x-16 \\ 0 & \end{array}$$

Il massimo comun divisore è l' ultimo divisore

$$x^2-3x+1.$$

155*. Per determinare il massimo comune divisore di più polinomi $A, B, C, D, \ldots$, si cerca quello dei primi due A e B. Sia questo M_1; esso conterrà tutti i fattori primi comuni ad A e a B. Per avere dunque tutti quelli comuni ad A, B e C, basterà cercare il massimo comun divisore tra M_1 e C. Sia questo M_2: poi cercheremo quello tra M_2 e D, e così seguitando, l' ultimo massimo comune divisore che troveremo, sarà quello dei polinomi $A, B, C, D, \ldots$; precisamente lo stesso processo dell' Aritmetica.

156*. Se i coefficienti di A e di A' saranno polinomi, terremo lo stesso metodo; ma per determinare il prodotto di tutti i fattori comuni indipendenti da x, bisognerà cercare il massimo comune divisore di più polinomi.

Esempio. Siano i due polinomi

$$A=(y^2-z^2)x^3+(y^3+y^2-z^2y-z^2)x^2-(y^4-2y^3-z^2y^2+2z^2y)x$$
$$-y^5+y^4+z^2y^3-z^2y^2,$$
$$A'=(y^2+zy+y+z)x^2+(y^3+(z+1)y^2+(z+1)y+z)x+y^2+zy.$$

Determiniamo il massimo comune divisore d dei coefficienti di A,

$$d=y^2-z^2;$$

parimente quello d' dei coefficienti di A',

$$d'=y+z.$$

Il massimo comune divisore D di d e di d' è

$$D = y + z.$$

Dividiamo A per d e A' per d', ed avremo i quozienti B e B',

$$B = x^3 + (y+1)x^2 - (y^2 - 2y)x - (y^3 - y^2),$$
$$B' = (y+1)x^2 + (y^2 + y + 1)x + y.$$

Effettuiamo la determinazione del massimo comune divisore di B e di B'.

Ecco il quadro delle operazioni:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + (y+1)x^2 - (y^2 - 2y)x - (y^3 - y^2) & (y+1)x^2 + (y^2 + y + 1)x + y \\ \hline
& x + y \\
y+1)x^3 + (y^2 + 2y + 1)x^2 - (y^3 - y^2 - 2y)x - (y^4 - y^2) & \\
\quad yx^2 - (y^3 - y^2 - y)x - (y^4 - y^2) & \\
y(y+1)x^2 - y^4 - 2y^2 - y)x - (y^5 + y^4 - y^3 - y^2) & \\
\quad -(y^4 + y^3 - y^2)x - (y^5 + y^4 - y^3) & \\
\quad\quad x + y. &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
(y+1)x^2 + (y^2 + y + 1)x + y & x + y \\ \hline
x + y & (y+1)x + 1 \\
0 &
\end{array}$$

onde il massimo comune divisore di B e B' sarà l'ultimo divisore $M = x + y$, e il massimo comune divisore di A e di A' sarà

$$DM = (y+z)(x+y).$$

Ricerca del minimo polinomio divisibile per più polinomi interi.

157*. Si può applicare la ricerca del massimo comune divisore algebrico alla determinazione del polinomio che risulta dal prodotto dei soli fattori primi neces-

sari, affinchè sia divisibile per più polinomi interi dati, che si chiamerà polinomio minimo divisibile per i medesimi.

Siano A, B, C, D, ..., espressioni monomie o polinomie qualunque; sia M_1 il massimo comune divisore di A e B, M_2 il massimo comune divisore di $\frac{AB}{M_1}$ e C, M_3 di $\frac{ABC}{M_1M_2}$ e D, ... e così di seguito; il polinomio minimo divisibile sarà $\frac{ABCD\ldots\ldots}{M_1M_2M_3\ldots.}$.

La dimostrazione non differisce da quella data in Aritmetica per i numeri.

Esercizi.

1°. Dati due polinomi, che non abbiano nessun fattore indipendente da x,

$$X_1 = Ax^m + A_1x^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1}x + A_m,$$
$$X_2 = Bx^m + B_1x^{m-1} + \ldots\ldots + B_{m-1}x + B_m,$$

costruiamo i due polinomi

$$BX_1 - AX_2 = X'_1 = A'x^{m-1} + A'_1x^{m-2} + \ldots\ldots + A'_{m-1},$$
$$\frac{1}{x}(B_mX_1 - A_mX_2) = X'_2 = B'x^{m-1} + B'_1x^{m-2} + \ldots + B'_{m-1},$$

e quindi

$$B'X'_1 - A'X'_2 = X''_1,$$
$$\frac{1}{x}(B'_{m-1}X'_1 - A'_{m-1}X'_2) = X''_2,$$

e così di seguito. Si dimostri che i primi polinomi $X_1^{(n)}$ $X_2^{(n)}$, che non differiscono altro che per fattori indipendenti da x, divisi per questi fattori danno il massimo comune divisore di X_1 e X_2.

2°. Come si deve modificare il metodo per la ricerca del

massimo comune divisore, che si deduce dall'esercizio precedente, nel caso che X_1 e X_2 siano di grado differente.

3°. Se due polinomi X e X_1 sono primi tra loro, e Y, Y_1, Y_2, ... sono i massimi fattori indipendenti dalla lettera ordinatrice x, dei resti successivi R, R_1, R_2..., che s'incontrano nella operazione della ricerca del massimo comune divisore di X e X_1, e d, d_1, d_2, ... sono i massimi comuni divisori di Y e F, di Y_1 e $\frac{FF_1}{d}$, di Y_2 e $\frac{FF_1F_2}{dd_1}$...., dove F, F_1 e F_2.... sono i moltiplicatori che servono a rendere interi i quozienti e i resti; dimostrare che si hanno le seguenti eguaglianze,

$$\frac{FF_1\ldots F_t}{dd_1\ldots d_t}X = P_tR_{t-1}+P_{t-1}R_t\frac{Y_t}{d_t},$$

$$\frac{FF_1\ldots F_t}{dd_1\ldots d_t}X_1 = Q_tR_{t-1}+Q_{t-1}R_t\frac{Y_t}{d_t},$$

$$Q_tX-P_tX_1 = \pm R_t\frac{YY_1\ldots Y_t}{dd_1\ldots d_t},$$

e che P, P_1, P_2...., Q, Q_1, Q_2.... sono polinomi interi.

4°. Ridurre alla più semplice espressione

$$\frac{\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}}{\dfrac{a^2b^2}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{b^2c^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c^2a^2}{(b-a)(b-c)}}.$$

CAPITOLO XIV.

COMBINAZIONI E FORMULA DEL BINOMIO.

Definizioni.

158. Si dicono combinazioni n a n di m oggetti diversi, i differenti gruppi che si possono formare, ciascuno con n dei medesimi oggetti: sarà utile di calcolarne il numero.

La quistione può considerarsi sotto due punti di vista differenti, secondo che si riguardano come diversi o eguali i gruppi che, essendo composti dei medesimi oggetti, differiscono soltanto per l'ordine con cui sono disposti.

Nel primo caso le combinazioni si chiamano *disposizioni*, nel secondo, *prodotti differenti.*

Esempio. Le disposizioni 2 a 2 di 3 lettere a, b, c sono

$$ab,\ ba,\ bc,\ cb,\ ca,\ ac;$$

per i prodotti differenti si possono prendere i gruppi

$$ab,\ bc,\ ca.$$

Numero delle disposizioni.

159. Cominciamo da calcolare il numero delle disposizioni differenti di m oggetti presi n a n. Indichiamo questo numero con $D_{m,n}$ e con $D_{m,n-1}$ quello delle disposizioni degli stessi oggetti $n-1$ a $n-1$. Se dopo avere formate tutte le disposizioni $n-1$ a $n-1$, si pongono successivamente, di seguito a ciascuna di esse, gli $m-(n-1)$ oggetti che non vi entrano, si formano

tante disposizioni n a n, quante sono le unità contenute nel numero

$$D_{m,\,n-1}\,(m-(n-1)) \text{ ossia } D_{m,\,n-1}\,(m-n+1);$$

perchè ogni disposizione $n-1$ a $n-1$ dà, in questo modo, $m-(n-1)$ disposizioni n a n. Ora $D_{m,\,n-1}\,(m-n+1)$ è precisamente il numero delle disposizioni n a n, cioè le disposizioni ottenute nel modo indicato, sono tutte quelle che si possono formare, e ciascuna non è stata ottenuta che una sola volta.

1°. Abbiamo ottenuto tutte le possibili disposizioni n a n, perchè si può formare ogni disposizione di n oggetti aggiungendo l'ultimo di essi, in fondo alla disposizione formata cogli altri $n-1$.

2°. Una stessa disposizione non si è potuta formare altro che una sola volta, poichè, essendo differenti le disposizioni $n-1$ a $n-1$ o gli $m-n+1$ oggetti che si aggiungono in fondo a ciascuna di esse, i gruppi che si formano differiscono o per gli $n-1$ primi oggetti, se derivano da due disposizioni $n-1$ a $n-1$ differenti, o per l'ultimo, se derivano dalla medesima disposizione $n-1$ a $n-1$.

Dunque abbiamo la relazione

$$D_{m,\,n} = (m-n+1)D_{m,\,n-1}\,.$$

Poichè questa relazione esiste per un valore qualunque di n, avremo anche, indicando con $D_{m,\,n-2}$, $D_{m,\,n-3}$, ... $D_{m,\,1}$ i numeri delle disposizioni $n-2$ a $n-2$, $n-3$ a $n-3$, ... 1 a 1,

$$\begin{aligned} D_{m,\,n-1} &= (m-n+2)D_{m,\,n-2}, \\ D_{m,\,n-2} &= (m-n+3)D_{m,\,n-3}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_{m,\,2} &= (m-1)D_{m,\,1}. \end{aligned}$$

Moltiplicando queste equazioni, membro a membro, i fattori $D_{m,\,n-1}$ $D_{m,\,n-2}$ .... $D_{m,\,2}$ compariranno nei

due membri della equazione che si ottiene, e quindi si potranno sopprimere, e osservando che $D_{m,1}=m$, si ha

$$D_{m,n}=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)(m-n+1).$$

Numero delle permutazioni.

160. La formula precedente, ponendo $n=m$, dà il numero delle disposizioni di m lettere m a m. Queste disposizioni, in ciascuna delle quali sono tutte le lettere, si dicono *permutazioni*. Indicando il loro numero con P_m, abbiamo

$$P_m=1.2.3\ldots(m-1)m;$$

poichè per $m=n$, $m-n+1$ diviene eguale all'unità.

Numero dei prodotti differenti.

161. I prodotti differenti di m oggetti n a n, sono i gruppi diversi che si possono formare con questi m oggetti, riguardando come identici quelli che non differiscono altro che per l'ordine degli oggetti.

Rappresentiamo con $C_{m,n}$ il numero di questi prodotti. Consideriamoli come già formati, e imaginiamo di eseguire tutte le permutazioni degli n oggetti contenuti in ciascuno dei medesimi; i gruppi così formati saranno le *disposizioni* degli m oggetti, n a n. Ora io dico che vi saranno tutte, e ciascuna una sola volta.

1°. Vi saranno tutte, perchè prendiamo una disposizione qualunque: considerando gli oggetti che la formano indipendentemente dal loro ordine, si avrà uno dei prodotti differenti; e la disposizione data sarà evidentemente una di quelle che si ottengono quando si permutano in tutti i modi possibili gli oggetti che constituiscono quel prodotto.

2°. Ogni disposizione sarà formata una sola volta, perchè le disposizioni che derivano da uno stesso pro-

dotto, differiscono per l'ordine degli oggetti, e quelle che derivano da due prodotti differenti, non sono composte delli stessi oggetti.

Si può dunque ottenere tutta la serie delle disposizioni, permutando i prodotti differenti in tutti i modi possibili. Ora, ogni prodotto dà $1.2.3....n$ disposizioni diverse, il numero totale delle disposizioni $D_{m,n}$ è dunque eguale al numero dei prodotti $C_{m,n}$ moltiplicato per $1.2.3....n$, e quindi abbiamo

$$D_{m,n} = C_{m,n}\, 1.2.3....n,$$

$$(1)\quad C_{m,n} = \frac{D_{m,n}}{1.2.3....n} = \frac{m(m-1)...(m-n+2)(m-n+1)}{1.2.3....n}.$$

162. Osservazione I. Alla formula precedente si può dare una forma che torna qualche volta più comoda. Moltiplichiamo per $1.2.3....m-n$ i due termini della frazione che rappresenta $C_{m,n}$, avremo

$$(2)\quad C_{m,n} = \frac{1.2....(m-n)(m-n+1)(m-n+2)....m}{1.2.3....n.1.2.3....m-n};$$

nel numeratore si trova il prodotto dei numeri interi da 1 fino ad m, nel denominatore, il prodotto dei numeri interi da 1 fino ad $m-n$, e il prodotto dei numeri interi da 1 a n.

163. Osservazione II. È evidente che la formula (2) rimane la stessa, se cangiamo n in $m-n$; con questa sostituzione mutandosi soltanto, uno nell'altro, i fattori $1.2.3....n$ e $1.2.3....m-n$ del denominatore.

Il numero dei prodotti differenti di m lettere n a n è dunque eguale a quello di m lettere, $m-n$ a $m-n$.

L'eguaglianza di questi numeri è anche evidente *a priori*. Infatti, se di m lettere se ne prendono n, ne resta un gruppo di $m-n$: i gruppi o prodotti n a n e $m-n$ a $m-n$ si corrispondono dunque due a due, e sono eguali in numero.

Potenza di un binomio.

164. Abbiamo veduto (25) che il prodotto di un numero qualunque di polinomi è la somma di tutti i prodotti che si possono formare, prendendo per fattori un termine di ciascuno.

Applichiamo questa regola alla formazione del prodotto di m binomi, che hanno eguali i primi termini,

$$(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+l).$$

Se ordiniamo questo prodotto per le potenze decrescenti di x, è evidente che il primo termine sarà x^m, prodotto che si ottiene prendendo come fattori gli m primi termini dei binomi.

Il termine in x^{m-1} si comporrà dei prodotti nei quali si prenderanno come fattori, i primi termini di $m-1$ binomi e il secondo del binomio rimanente, e quindi il coefficiente di x^{m-1} sarà la somma dei secondi termini di tutti i binomi.

Il termine in x^{m-2} si comporrà dei prodotti, nei quali si prenderanno per fattori i primi termini di $m-2$ binomi e i secondi dei due binomi che restano. Il coefficiente di x^{m-2} sarà dunque la somma dei prodotti due a due dei secondi termini.

Si vedrà, nello stesso modo, che il coefficiente di x^{m-3} è la somma dei prodotti tre a tre dei secondi termini, e che in generale, il coefficiente di x^{m-n} è la somma dei loro prodotti n a n.

Si scrive spesso questo risultato nel modo seguente:

$$\begin{aligned}&(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+k)(x+l)\\ &=x^m+x^{m-1}\Sigma a+x^{m-2}\Sigma ab+x^{m-3}\Sigma abc\dots\\ &+x^{m-n}\Sigma abc\dots q+\dots+abc\dots kl,\end{aligned}$$

rappresentando con Σa, Σab, Σabc, ... la somma dei secondi termini, la somma dei loro prodotti due a due, tre a tre, ec.

165. Per passare alla espressione di $(x+a)^m$, basta supporre nella formula precedente $a=b=c=....=l$.

Il primo termine rimane eguale ad x^m.

Il coefficiente di x^{m-1}, eguale alla somma dei secondi termini, diviene eguale ad ma.

Il coefficiente di x^{m-2}, eguale alla somma dei prodotti due a due dei secondi termini, diviene eguale ad a^2 moltiplicato per il numero di questi prodotti, cioè ad

$$\frac{m(m-1)}{2}a^2.$$

Il coefficente di x^{m-3}, eguale alla somma dei prodotti tre a tre dei secondi termini, diviene eguale ad a^3 moltiplicato per il numero di questi prodotti, cioè ad

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3.$$

In generale, il coefficiente di x^{m-p}, che è la somma dei prodotti p a p dei secondi termini, diverrà eguale ad a^p moltiplicato per il numero di questi prodotti, cioè ad

$$\frac{m(m-1)(m-2)....(m-p+1)}{1.2.3....p}a^p;$$

si ha dunque finalmente

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2} + ...$$
$$+ \frac{m(m-1)....(m-p+1)}{1.2....p}a^px^{m-p} + ... + a^m.$$

166. Osservazione I. Nella formula precedente, i termini ad egual distanza dagli estremi hanno i coefficienti eguali. Infatti, il coefficiente di $x^{m-p}\,a^p$ è il numero dei prodotti differenti di m lettere p a p, e quello di $a^{m-p}\,x^p$ è il numero dei prodotti differenti di m lettere $m-p$ ad $m-p$, e questi numeri sono eguali (163).

167. Osservazione II. Nella formula che dà $(x+a)^m$, si può ottenere con molta semplicità ciascun termine, deducendolo dal precedente. Infatti, esaminando attentamente i termini successivi, si trova questa regola generale:

Per passare da un termine a quello che lo segue, bisogna moltiplicare il coefficiente del primo per l'esponente di x *nel medesimo, dividerlo per il numero che indica il posto che occupa, aggiungere uno all' esponente di* a, *e togliere uno da quello di* x.

168. Osservazione III. Non abbiamo fatto alcuna ipotesi quanto al segno dei numeri x ed a; a può dunque avere un valore negativo $-b$, e quindi abbiamo

$$(x-b)^m = x^m + m(-b)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}(-b)^2x^{m-2} + \ldots.$$
$$+(-b)^m;$$

ovvero, osservando che le potenze pari di $-b$ sono eguali a quelle di b, e le potenze dispari eguali e di segno contrario,

$$(x-b)^m = x^m - mbx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}b^2x^{m-2}$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}b^3x^{m-3} + \ldots. \pm b^m.$$

Potenza di un trinomio.

169. Un trinomio $a+b+c$ può considerarsi come un binomio, quando si riguardino i primi due termini $(a+b)$ come riuniti in un solo. Così avremo

$$(1) \qquad [(a+b)+c]^m$$
$$= (a+b)^m + m(a+b)^{m-1}c + \frac{m(m-1)}{1.2}(a+b)^{m-2}c^2 + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}(a+b)^{m-p}c^p + \ldots + c^m.$$

Svolgendo le diverse potenze di $a+b$ che compariscono nel secondo membro, si otterrà una somma di termini della forma $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, nei quali la somma degli esponenti α, β, γ, sarà sempre eguale ad m. Quelli, per esempio, che derivano dal termine

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}(a+b)^{m-p}c^p,$$

contengono c^p moltiplicato per potenze di a e di b, gli esponenti delle quali hanno una somma eguale a $m-p$, in modo che la somma dei tre esponenti di a, b e c è eguale ad m.

Reciprocamente, essendo α, β e γ tre numeri qualunque, la somma dei quali è eguale ad m, si troverà sempre nello svolgimento della potenza del trinomio un termine in $a^\alpha b^\beta c^\gamma$: perchè nella formula (1) si trova il termine

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-\gamma+1)}{1.2\ldots\gamma}(a+b)^{m-\gamma}c^\gamma,$$

e $(a+b)^{m-\gamma}$ contiene un termine nel quale a è inalzato alla potenza α e quindi b alla potenza $m-\gamma-\alpha$, ossia β.

170. Cerchiamo il coefficiente di questo termine in $a^\alpha b^\beta c^\gamma$; esso deriva, come abbiamo detto, da

$$\frac{m(m-1)\dots(m-\gamma+1)}{1.2\dots\gamma}(a+b)^{m-\gamma}c^\gamma,$$

che equivale (162) ad

$$\frac{1.2\dots m}{1.2\dots\gamma.1.2\dots m-\gamma}(a+b)^{m-\gamma}c^\gamma;$$

ora in $(a+b)^{m-\gamma}$ il coefficiente di $a^\alpha b^{m-\gamma-\alpha}$ è eguale ad

$$\frac{1.2\dots(m-\gamma)}{1.2\dots\alpha.1.2\dots(m-\gamma-\alpha)}.$$

Il termine richiesto è dunque

$$\frac{1.2\dots m.1.2\dots m-\gamma}{1.2\dots\gamma.1.2\dots(m-\gamma).1.2\dots\alpha.1.2\dots m-\gamma-\alpha}\,a^\alpha b^{m-\gamma-\alpha}c^\gamma;$$

sopprimendo il fattore comune $1.2\dots(m-\gamma)$ e sostituendo β ad $m-\gamma-\alpha$, diviene

$$\frac{1.2\dots m}{1.2\dots\alpha.1.2\dots\beta.1.3\dots\gamma}a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

e si dovranno prendere tutti i termini analoghi che corrispondono a tutti i valori di α, β e γ, la somma dei quali è eguale ad m.

Potenza di un polinomio.

171*. Dimostreremo che se la potenza m^{esima} di un polinomio $a+b+c\dots+k$, di n termini, è la somma di tutte le espressioni

$$\frac{1.2\dots m}{1.2\dots\alpha.1.2\dots\beta.1.2\dots\gamma\dots1.2\dots\eta}a^\alpha b^\beta c^\gamma\dots k^\eta,$$

che si ottengono dando ad α, β, γ, $\dots\eta$ tutti i valori, la

somma dei quali è m; anche la potenza m^{esima} di un polinomio $a+b+c+\ldots+k+l$, di $n+1$ termini, sarà la somma di espressioni analoghe, che si otterranno egualmente.

Un polinomio $a+b+c+\ldots+k+l$ può considerarsi come un binomio, riguardando come un sol termine la somma $a+b+c+\ldots+k$, che porremo eguale ad A; avremo così

$$(1) \qquad (a+b+c\ldots+k+l)^m =$$
$$=(A+l)^m = A^m + mA^{m-1}l + \frac{m(m-1)}{2}A^{m-2}l^2 + \ldots$$
$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-\theta+1)}{1.2\ldots\theta}A^{m-\theta}l^{\theta}+\ldots$$

Svolgendo le potenze di A, si otterrà una somma di termini della forma $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots k^{\eta}l^{\theta}$, nei quali la somma degli esponenti $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \eta, \theta$ è eguale ad m. Quelli, per esempio, che derivano da

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-\theta+1)}{1.2\ldots\theta}A^{m-\theta}l^{\theta},$$

contengono l^{θ} moltiplicato per potenze di $a, b, c, \ldots k$, gli esponenti delle quali hanno una somma eguale ad $m-\theta$, in modo che la somma di tutti gli esponenti è eguale ad m.

Reciprocamente, essendo $\alpha, \beta, \gamma \ldots \eta, \theta$, $n+1$ numeri qualunque che sommati insieme danno m, si troverà sempre nello svolgimento della potenza del polinomio, un termine $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots k^{\eta}l^{\theta}$; perchè nella formula (1) ne abbiamo uno della forma

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-\theta+1)}{1.2\ldots\theta}A^{m-\theta}l^{\theta},$$

e $A^{m-\theta}$ contiene un termine nel quale $a, b, c, \ldots k$ sono

inalzati agli esponenti $\alpha, \beta \ldots \eta$, la somma dei quali è $m-\theta$, che aggiunta all' esponente θ di l, dà m.

172*. Cerchiamo il coefficiente del termine $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots k^\eta l^\theta$. Esso deriva da

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-\theta+1)A^{m-\theta}l^\theta}{1.2\ldots\theta} = \frac{1.2.3\ldots m}{1.2\ldots\theta.1.2\ldots m-\theta} A^{m-\theta}l^\theta.$$

Ora il coefficiente di $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots k^\eta$, in $A^{m-\theta}$, è

$$\frac{1.2\ldots m-\theta}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma\ldots1.2\ldots\eta},$$

quindi, eseguendo la moltiplicazione, e sopprimendo il fattore comune $1.2\ldots m-\theta$, si ottiene

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta\ldots1.2\ldots\eta.1.2\ldots\theta}\, a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\theta,$$

e si dovranno prendere tutti i termini analoghi corrispondenti ai valori interi e positivi che sodisfano alla equazione

$$\alpha+\beta+\gamma\ldots\eta+\theta=m.$$

Ora, questa legge di formazione del termine generale di una potenza di un polinomio è vera per un trinomio, dunque anche per un polinomio di quattro termini, e così discorrendo, per uno composto di un numero qualunque di termini.

Osservazione. Se vogliamo che il termine generale, che abbiamo trovato per la potenza di un polinomio, rappresenti tutti quanti i termini della medesima, bisogna fare la convenzione che per $\alpha=o$, si debba prendere $1.2.3\ldots.\alpha=1$.

Esercizi.

1°. Verificare le formule

$$D_{a+b,\,m} = D_{a,m} + mD_{a,\,m-1}D_{b,\,1} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}D_{a,m-2}D_{b,\,2} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots n}D_{a,\,m-n}D_{b,\,n} + \ldots\ldots + D_{b,\,m}$$

$$D_{a+b+c,\,m} = D_{a,\,m} + \ldots\ldots + \frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2.\gamma}D_{a,\,\alpha}D_{b,\,\beta}D_{c,\,\gamma} + \ldots\ldots$$

indicando al solito con $D_{p,\,m}$ il prodotto $m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-p+1)$, e il secondo membro della seconda formula comprendendo tutti i termini analoghi a quello che abbiamo scritto e che corrispondono ai valori di α, β, γ che sommati insieme danno m, e ritenendo $D_{a,\,0} = 1$.

2°. Determinare il numero dei termini di $(a+b+c)^m$ e di $(a+b+c+d)^m$.

3°. Verificare la formula

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^n - n\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\,.\,2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-4}$$

$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1\,.\,2\,.\,3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-6} + \ldots\ldots$$

$$+(-1)^p\frac{n(n-p-1)(n-p-2)\ldots\ldots(n-2p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2p} + \ldots\ldots$$

4°. Verificare la formula

$$1\,.\,2\,.\,3\ldots m = (m+1)^m - m\,.\,m^m + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}(m-1)^m$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}(m-2)^m + \ldots\ldots$$

5°. Trovare il maggior termine dello sviluppo di $(x+a)^m$, quando siano dati x ed a, e trovare il limite del rapporto dei loro esponenti nel termine massimo, quando m aumenta indefinitamente.

Trovare il maggior termine dello sviluppo di $(a+b+c)^m$

e i limiti dei rapporti degli esponenti di a, b e c, in questo termine massimo, quando m aumenta indefinitamente.

6°. Verificare che $(x+a)^m+(x-a)^m$ è maggiore di $2x^m$. Dedurne il massimo di $x+y$ quando è dato x^m+y^m.

7°. Verificare la formula

$$(x+\alpha)^m = x^m + m\alpha(x+\beta)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2}$$
$$+ \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}(x+n\beta)^{m-n}$$
$$+ \ldots m\alpha(\alpha-(m-1)\beta)^{m-2}(x+(m-1)\beta)+\alpha(\alpha-m\beta)^{m-1}.$$

Questa formula coincide con quella del binomio, quando $\beta=o$; è vera qualunque sia β.

8°. Determinare il numero dei modi differenti, ne' quali si può decomporre un poligono in triangoli per mezzo delle diagonali: dimostrare le formule

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}P_3 + P_{n-2}P_4 + \ldots + P_3\,P_{n-1}+P_n,$$
$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n}P_n,$$

rappresentando P_n quanti modi differenti si possono tenere per questa decomposizione in un poligono di n lati.

9°. Considerando una permutazione di n numeri $1.2.3\ldots n$, e dicendo che in essa vi è uno *spostamento*, quando un numero è seguito immediatamente o dopo qualche altro, da uno minore, dimostrare che il numero totale degli spostamenti contenuti nelle permutazioni di questi n numeri è $1.2.3\ldots n.\frac{n(n-1)}{4}$.

10°. Se m è un numero dispari, e $n < m-1$, si ha

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{1}{m}-\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{m-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{m-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{m-3}+\ldots\right)=\pm1.$$

11°. Se

$$1,\ A,\ B,\ C,\ D,\ \ldots$$

sono i coefficienti della m^{esima} potenza di un binomio,

$$1,\ 1+A,\ A+B,\ B+C,\ C+D,\ldots$$

saranno quelli della potenza $(m+1)^{esima}$.

12°. Scrivendo sopra un circolo m numeri

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots .\ x_m;$$

sommando ogni numero col precedente, e scrivendo le somme sopra un nuovo circolo, e operando su questo circolo come sul precedente; se $n+1<m$, i numeri scritti sull'$(n+1)^{esimo}$ circolo saranno della forma

$$x_1+nx_2+\frac{n(n-1)}{1.2}x_3+\ldots .+nx_n+x_{n+1},$$

e la somma dei numeri scritti su questo circolo sarà eguale a $2^n(x_1+x_2+x_3+\ldots .+x_m)$.

13°. Tra i divisori di un numero dato quanti ve ne sono che contengono n fattori primi differenti?

CAPITOLO XV.

RADICI DEI POLINOMI.

—

173. L'estrazione della radice è una operazione che in generale non può effettuarsi sui polinomi, e molto spesso bisogna contentarsi d'indicarla. In alcuni casi però la radice di un polinomio può esprimersi per un altro polinomio; vedremo come allora si possa trovare. Primieramente ci occuperemo della radice quadrata.

Radice quadrata dei polinomi.

174. La determinazione della radice quadrata di un polinomio si fonda sul seguente

Teorema. *Se un polinomio* A *ordinato per le potenze decrescenti di una lettera è il quadrato di un altro polinomio* B *ordinato nello stesso modo, il primo termine di* A *è il quadrato del primo termine di* B.

Infatti, il prodotto di due polinomi ha per primo termine (26) il prodotto dei primi termini dei due fattori. Dunque, se i due polinomi che si moltiplicano, sono eguali a uno stesso polinomio B, il prodotto B^2 avrà per primo termine il quadrato del primo termine di B.

Si può anche dire che se un polinomio B è la radice quadrata di un polinomio A, il primo termine di B è la radice quadrata del primo termine di A.

Potremo dunque, quando un polinomio sarà ordinato per le potenze decrescenti di una lettera, calcolare

il termine che deve essere il primo della radice, se questa può essere un polinomio. Se il primo termine del polinomio proposto è Ax^m, il primo termine della radice quadrata non potrà essere altro che $\sqrt{Ax^m}$ ovvero $x^{\frac{m}{2}}\sqrt{A}$. Questo termine è razionale soltanto quando $\frac{m}{2}$ è intero, e A è un quadrato perfetto.

175. Sapendo così trovare sempre il primo termine della radice, potremo determinarli successivamente tutti, se risolveremo la questione seguente.

Conoscendo gli n *primi termini della radice, trovare l'* $(n+1)^{esimo}$.

Sia A il polinomio proposto, S l'insieme degli n primi termini della radice, e z la somma dei termini seguenti che supponiamo tuttora incogniti; dovremo avere identicamente

$$A=(S+z)^2,$$

ossia

$$A=S^2+2Sz+z^2,$$

e trasportando S^2, che è cognito, nel primo membro,

$$A-S^2=2Sz+z^2.$$

Dovendo essere identici i due membri della equazione precedente, i termini di più alto grado in x saranno eguali. Poichè A ed S sono cogniti, si troverà facilmente il primo termine di $A-S^2$; quanto al secondo membro, il termine di più alto grado è il prodotto del primo termine di $2S$ per il primo termine di z; infatti, questo prodotto è il primo termine di $2Sz$, ed è di grado più elevato del primo termine di z^2, poichè essendo z di grado inferiore ad S, z^2 è di grado inferiore a Sz.

Dunque, chiamando v il primo termine di z, il pro-

dotto di v per il primo termine di $2S$ sarà eguale al primo termine del primo membro; quindi, v è il quoziente della divisione del primo termine di $A-S^2$ per il primo termine di $2S$, cioè per il doppio del primo termine della radice.

176*. Osservazione. Le espressioni $A-S^2$ cangiano a ogni operazione, poichè S contiene ogni volta un termine di più: ma si può rendere più semplice il calcolo delle medesime, deducendole una dall' altra. Supponiamo di avere determinato, mediante l' espressione $A-S^2$, il termine $(n+1)^{esimo}$ che chiameremo v: per determinare l' $(n+2)^{esimo}$ bisognerà calcolare

$$A-(S+v)^2, \text{ ossia } A-S^2-2Sv-v^2,$$

e quindi basterà sottrarre da $A-S^2$ l'espressione $2Sv+v^2$, ossia $(2S+v)v$, cioè la somma del doppio degli n primi termini della radice più l' $(n+1)^{esimo}$ moltiplicata per l' $(n+1)^{esimo}$. Poichè il primo termine di questo prodotto è eguale al primo termine di $A-S^2$, essi si distruggeranno, e quindi il primo termine della seconda espressione è di grado minore di quello della prima, e in conseguenza i termini ottenuti in radice vanno continuamente diminuendo di grado, come deve essere.

177. I ragionamenti precedenti suppongono che esista una radice quadrata rappresentata da un polinomio, e danno il modo di ottenerne i differenti termini. Rimane ad esaminarsi il caso in cui la radice non può esser posta sotto questa forma, ed a cercare come si può conoscere questa impossibilità.

Se A non è il quadrato di un polinomio, $A-S^2$ non potrà mai essere nullo, qualunque sia il numero dei termini di S, e l' operazione non avrà mai fine. Continuandola, si troverebbe una serie di termini, gli espo-

nenti dei quali diverrebbero negativi dopo un certo punto, e crescerebbero indefinitamente in valore assoluto. Per riconoscere quando questo accada, osserviamo che se esiste un polinomio che sia radice, l'ultimo termine del medesimo potrà calcolarsi immediatamente, e nello stesso modo che il primo: si può dimostrare infatti, come (174), che esso è la radice quadrata dell'ultimo termine del polinomio proposto; dunque, allorchè l'operazione darà un termine di grado inferiore a quello che deve avere l'ultimo, si può tralasciare di continuarla, ed essere certi che essa non avrà mai fine.

178. Osservazione. Qualche volta, la sola ispezione di un polinomio basta per assicurare che non è quadrato di alcun polinomio.

1°. Quando il primo e l'ultimo termine non hanno una radice quadrata razionale, è evidente che nessun polinomio *razionale* potrà esser radice quadrata del proposto.

2°. Anche se la radice quadrata del primo termine ha un coefficiente irrazionale, il polinomio potrà avere una radice quadrata con coefficienti irrazionali, che contenga razionalmente la lettera ordinatrice. Ma se la radice quadrata del primo termine è razionale, bisogna che sia razionale anche quella dell'ultimo; perchè, essendo razionale il primo termine della radice, l'operazione che fa conoscere gli altri non può dare, evidentemente, altro che termini razionali; dunque bisogna che anche l'ultimo termine della radice sia razionale, e quindi che l'ultimo termine del polinomio proposto sia un quadrato perfetto.

179. Esempio. Si debba estrarre la radice quadrata da

$$(y^2+2y+1)x^4+(4y^2+4y)x^3+(6y^3+12y^2+2y)x^2+(12y^3+4y^2)x$$
$$+\ 9y^4+6y^3+y^2.$$

Il primo termine della radice è (174) la radice quadrata di

$$(y^2+2y+1)x^4,$$

cioè

$$x^2\sqrt{y^2+2y+1}.$$

Ora si potrebbe trovare col metodo generale, ma è facile a vedersi immediatamente, che si ha

$$\sqrt{y^2+2y+1}=y+1;$$

dunque, il primo termine della radice del polinomio proposto ordinata secondo le potenze di x, sarà

$$x^2(y+1).$$

L'osservazione fatta (177) qui non può applicarsi, e non si vede alcun segno d'impossibilità, perchè l'ultimo termine del polinomio proposto $9y^4+6y^3+y^2$ è un quadrato perfetto $(3y^2+y)^2$. Dunque continuiamo l'operazione.

Facendo il quadrato del primo termine della radice e sottraendolo dal polinomio proposto, resta

$$(4y^2+4y)x^3+(6y^3+12y^2+2y)x^2+(12y^3+4y^2)x+9y^4+6y^3+y^2;$$

il primo termine di questo resto, $(4y^2+4y)x^3$, diviso per il doppio del primo termine della radice, $2x^2(y+1)$, dà per quoziente $2xy$, che sarà (175) il secondo termine della radice.

Facendo il prodotto della somma del doppio del primo termine e del secondo per il secondo,

$$(2x^2(y+1)+2xy)2xy,$$

e sottraendolo dal primo resto, si trova (176) per secondo resto

$$(6y^3+8y^2+2y)x^2+(12y^3+4y^2)x+9y^4+6y^3+y^2.$$

Il primo termine di questo resto, $(6y^3+8y^2+2y)x^2$, diviso per il doppio del primo termine della radice, $2x^2(y+1)$,

dà per quoziente $3y^2+y$, che è il terzo termine della radice.

Facendo il prodotto della somma del doppio dei due primi termini della radice più il terzo per il terzo

$$(2x^2(y+1)+4xy+3y^2+y)(3y^2+y),$$

e sottraendo dal secondo resto, si trova un resto nullo. Quindi il polinomio proposto è un quadrato perfetto, e ne abbiamo determinata la radice.

Si debba ancora estrarre la radice quadrata da

$$x^8y^2+3yx^7+y^3x^4+y^2+1;$$

la sola ispezione di questo polinomio fa vedere (178) che non può avere per radice quadrata un altro polinomio, perchè il primo termine x^8y^2 è un quadrato perfetto $(x^4y)^2$, mentre non è tale l' ultimo termine y^2+1.

Radice m^{esima} dei polinomi.

180. La determinazione della radice m^{esima} di un polinomio si fonda sul seguente

TEOREMA. *Se un polinomio* A *ordinato per le potenze decrescenti di una lettera, è la potenza* m^esima^ *di un altro polinomio* B *ordinato egualmente, il primo termine di* A *è la potenza* m^esima^ *del primo termine di* B.

Nella moltiplicazione di più polinomi, il primo termine del prodotto è il prodotto dei primi termini dei fattori; dunque, quando i polinomi da moltiplicarsi sono tutti eguali a uno stesso polinomio B, e quindi il prodotto è B^m, il primo termine sarà il prodotto dei primi termini, ossia la potenza m^{esima} del primo termine di B; come volevamo dimostrare.

Si potrebbe enunciare il teorema anche nel modo seguente: Se un polinomio B è la radice m^{esima} di un po-

linomio A, il primo termine di B è la radice m^{esima} del primo termine di A.

Si potrà dunque, allorchè un polinomio è ordinato per le potenze decrescenti di una lettera, calcolare il primo termine della radice. Difatti, se il primo termine del polinomio proposto è Ax^n, il primo termine della radice non potrà essere altro che $\sqrt[m]{Ax^n}$, cioè $x^{\frac{n}{m}}\sqrt[m]{A}$. Questo termine non sarà razionale altro che quando $\frac{n}{m}$ sarà intero, e A una potenza m^{esima} esatta.

181. Osservazione I. Se il coefficiente del primo termine di A è numerico, si conoscerà facilmente se è una potenza esatta, e se ne determinerà la radice. Ma se è un polinomio, bisognerà cominciare da estrarre la radice di questo polinomio. Perciò l'ordineremo per una delle lettere che contiene, e gli applicheremo il metodo che esponiamo.

182. Osservazione II. L'ultimo termine della radice può ottenersi immediatamente come il primo; poichè si dimostra, precisamente nello stesso modo, che è la radice m^{esima} dell'ultimo termine del polinomio proposto.

183. Conoscendo il modo di ottenere sempre il primo termine della radice, per determinare successivamente tutti gli altri, basterà risolvere la questione seguente:

Conosciuti gli n *primi termini della radice, trovare l'* $(n+1)^{esimo}$.

Siano A il polinomio proposto, S la somma degli n primi termini della radice, e z la somma dei termini che restano da determinarsi; dovremo avere identicamente

$$A=(S+z)^m,$$

ossia (165),

$$A=S^m+mzS^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}z^2S^{m-2}+\ldots.+z^m,$$

e trasportando S^m, che è conosciuto, nel primo membro,

$$A-S^m=mzS^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}z^2S^{m-2}+\ldots.+z^m;$$

i due membri della equazione precedente dovendo essere identici, i loro primi termini devono essere eguali. Poichè A ed S sono cogniti, sarà facile di calcolare il primo termine di $A-S^m$. Il primo termine del secondo membro è il primo termine di mzS^{m-1}, perchè questo prodotto è di grado superiore ai termini seguenti che contengono $S^{m-2}z^2$, $S^{m-3}z^3$.... Difatti, questi fattori contengono la lettera ordinatrice inalzata a esponenti sempre più piccoli, poichè per formare ciascuno di essi bisogna sostituire nel precedente ad un fattore eguale ad S, un fattore eguale a z che è di grado inferiore. Dunque chiamando v il primo termine di z, il prodotto di v per il primo termine di mS^{m-1} sarà eguale al primo termine del primo membro, e quindi v è il quoziente della divisione del primo termine del primo membro, per il primo termine di mS^{m-1}.

OSSERVAZIONE I. Il primo termine di mS^{m-1} è eguale a m volte la $(m-1)^{esima}$ potenza del primo termine di S, e quindi nelle divisioni che danno i termini successivi della radice, il divisore è sempre lo stesso.

OSSERVAZIONE II. Il primo membro $A-S^m$ cangia per ogni operazione, poichè S contiene ogni volta un termine di più.

Si possono dedurre i valori di queste espressioni uno dall'altro. Supponiamo di avere determinato il termine $(n+1)^{esimo}$, che chiameremo v, servendosi della espressione $A-S^m$; per determinare l'$(n+2)^{esimo}$, bisognerà calcolare $A-(S+v)^m$, ossia

$$A-S^m-mS^{m-1}v-\frac{m(m-1)}{1.2}S^{m-2}v^2\ldots.-v^m.$$

e quindi basterà sottrarre dalla espressione $A-S^m$ già calcolata

$$mS^{m-1}v+\frac{m(m-1)}{1.2}S^{m-2}v^2+\ldots.+v^m,$$

ossia

$$(mS^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}S^{m-2}v+\ldots.+v^{m-1})v.$$

Poichè il primo termine di questo prodotto è eguale al primo di $A-S^m$, essi si distruggeranno, e quindi il primo termine della seconda espressione sarà di grado inferiore a quello della prima, e in conseguenza i termini ottenuti in radice andranno continuamente diminuendo di grado.

184. In quello che abbiamo detto fin qui, abbiamo supposto che esista una radice m^{esima} eguale a un polinomio, e abbiamo determinato il modo di trovarne i differenti termini. Ma bisogna anche esaminare il caso in cui la radice non può mettersi sotto questa forma, e mostrare come può riconoscersi questa impossibilità.

Se A non è la potenza m^{esima} di alcun polinomio, $A-S^m$ non sarà mai nullo, e l'operazione non terminerà mai. Continuandola, si troverebbe una serie indefinita di termini, gli esponenti dei quali a un certo punto diverrebbero negativi, e crescerebbero indefinitamente in valore assoluto. Per conoscere quanto bisognerà avanzarsi coll'operazione per potere affermare questo, basterà osservare, che se la radice esiste, il suo ultimo termine può calcolarsi immediatamente (182). Dunque quando troveremo un termine coll'esponente inferiore a quello che deve avere l'ultimo, potremo tralasciare di continuare l'operazione, poichè saremo certi che non avrebbe mai fine.

185. Osservazione. Qualche volta la sola ispe-

zione di un polinomio basta per distinguere che non è potenza m^{esima} di un altro polinomio.

1°. Quando il primo e l'ultimo termine non sono potenze m^{esime} esatte, nessun polinomio razionale può essere radice del polinomio proposto.

2°. Se la radice m^{esima} del primo termine ha un coefficiente irrazionale, può accadere che il polinomio abbia una radice m^{esima} con i coefficienti irrazionali e che contenga razionalmente la lettera ordinatrice. Ma se la radice m^{esima} del primo termine è razionale, bisogna che sia tale anche quella dell'ultimo, perchè se il primo termine della radice è razionale, l'operazione che serve alla determinazione degli altri non può dare che termini razionali; dunque è necessario che anche l'ultimo sia razionale, e che quindi l'ultimo termine del polinomio proposto sia una potenza m^{esima} esatta.

Esercizi.

1°. Se u, v, z sono tre frazioni algebriche, razionali, che contengono una sola lettera x, e tali che

$$u^2 = v^2 + z;$$

se, inoltre, il grado di z (eccesso del grado del numeratore sopra il grado del denominatore) è minore di quello di u; dimostrare che la parte intera di v è uguale a quella di u.

2°. Trovare un triangolo che abbia i tre lati e l'altezza in progressione per quoziente. Chiamando due lati x e y, l'altro sarà $\frac{x^2}{y}$, l'altezza $\frac{y^2}{x}$ e l'area $\frac{xy}{2}$. Eguagliando questa espressione a quella che si ottiene dando l'area in funzione dei lati, avremo una equazione di ottavo grado, che si può rendere più semplice, perchè il suo primo membro, quando vi sono stati portati tutti i termini, è un quadrato perfetto.

3°. Estrarre la radice quadrata da

$$4lm(l+m)(l+n)+(l^2-mn)^2.$$

4°. Estrarre la radice quadrata da

$$4\left\{(a^2-b^2)cd+(c^2-d^2)ab\right\}^2+\left\{(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd\right\}^2.$$

5°. Estrarre la radice quadrata dalla espressione

$$(a^2+ab+b^2)(c^2+cd+d^2)-(bc-ad)^2-(bc-ad)(ac+ad+bd).$$

6°. Estrarre la radice cubica dalla espressione

$$a^3+b^3+c^3+d^3-(a+b)^3-(a+c)^3-(a+d)^3-(b+c)^3-(b+d)^3-(c+d)^3$$
$$+(a+b+c)^3+(b+c+d)^3+(c+d+a)^3+(d+a+b)^3.$$

7°. Risolvere l' equazione

$$\frac{1}{p^3p^3}=\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right)+\frac{3}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{6}{x^5}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right).$$

8°. Risolvere l' equazione

$$\frac{1}{p^4q^3}-\frac{1}{p^3q^4}=\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^4}-\frac{1}{q^4}\right)+\frac{2}{(p+q)^4}\left(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^3}\right)$$
$$+\frac{2}{x^5}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right).$$

9°. Estrarre la radice quadrata dalla espressione

$$\sqrt[x]{a^{-\frac{2}{y}}}+\sqrt[r]{a^{\frac{4}{y}}b}+2\sqrt{\sqrt[r]{b}}\sqrt{\sqrt[x]{\sqrt[y]{\sqrt[r]{a^{x-2r}}}}}.$$

CAPITOLO XVI.

METODO DEI COEFFICIENTI INDETERMINATI.

---

186. Il metodo più semplice e naturale per determinare un polinomio ordinato rapporto a una lettera, che sodisfi ad alcune date condizioni, consiste nello scrivere questo polinomio lasciando indeterminati i coefficienti e qualchevolta anche il grado, e nell'esprimere che sodisfa alle condizioni proposte. Si ottengono così alcune equazioni nelle quali questi coefficienti e questo grado compariscono come altrettante incognite, delle quali si può ricavarne il valore.

Questo metodo può applicarsi alla soluzione di due questioni risolute di sopra, la divisione dei polinomi e l'estrazione delle loro radici. Indicheremo questo secondo modo di stabilire la teorica di queste operazioni, e vedremo facilmente che porta precisamente ai medesimi calcoli dei metodi già esposti.

187. Si debbano dividere, uno per l'altro, due polinomi di grado m ed n,

$$Ax^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+....+A_m \quad \Big| \; \underline{Bx^n+B_1x^{n-1}+....+B_n.}$$

Bisogna che il quoziente, moltiplicato per il divisore, riproduca identicamente il dividendo. Ora, se rappresentiamo con α il grado del quoziente, quello del prodotto sarà $n+\alpha$, e quindi si dovrà avere $n+\alpha=m$, ossia $\alpha=m-n$. Conosciuto, così, il grado del quoziente e quindi il numero dei suoi coefficienti eguale ad $\alpha+1$,

si potrà, rappresentando ogni coefficiente con una lettera qualunque, effettuare il prodotto del quoziente per il divisore. Questo prodotto, essendo di grado m, sarà composto di $m+1$ termini; eguagliando questi ai termini corrispondenti del dividendo, si otterranno $m+1$ equazioni di primo grado tra gli $m-n+1$ coefficienti incogniti. $m-n+1$ di queste equazioni basteranno per determinarli; le altre dovranno risultare verificate e saranno equazioni di condizione.

188. Se vogliamo applicare il metodo dei coefficienti indeterminati alla determinazione del quoziente e del resto, quando la divisione non è possibile, bisognerà porre la questione nel modo seguente:

Trovare un polinomio che, moltiplicato per il divisore, dia un prodotto, la cui differenza col dividendo sia di grado inferiore al divisore.

È evidente che basterà eguagliare ai termini corrispondenti del dividendo quei termini di questo prodotto, il grado dei quali non è minore del grado n del divisore. Così, otterremo $m-n+1$ equazioni (le stesse che se cercassimo un quoziente esatto), per mezzo delle quali determineremo tutti i coefficienti del quoziente. La differenza tra il dividendo e il prodotto del quoziente per questo divisore sarà il resto.

189. Le $m-n+1$ equazioni che determinano il quoziente hanno una forma notevole, che le rende facilmente risolvibili.

Sia

$$Cx^{m-n}+C_1x^{m-n-1}+\ldots\ldots+C_kx^{m-n-k}+\ldots\ldots+C_{m-n},$$

il quoziente incognito.

La prima equazione contiene la sola incognita C; conosciuta C, dalla seconda si ricaverà C_1, che vi entra soltanto al primo grado; trovate C e C_1, dalla terza ri-

avremo C_2 che vi è solo al primo grado. In generale, ogni equazione contiene al primo grado un'incognita che non compariva nelle equazioni precedenti, e somministra il modo di determinarla.

Per dimostrarlo, osserviamo che facendo il prodotto di

$$Bx^n+B_1x^{n-1}+\ldots.+B_n,$$

per

$$Cx^{m-n}+C_1x^{m-n-1}+\ldots.+C_{m-n},$$

C_k non comparirà in alcun termine di grado maggiore di $m-k$; in guisa che le prime k equazioni non conterranno questa incognita; quanto alla $(k+1)^{esima}$, conterrà C_k al primo grado, perchè, nel prodotto, il solo termine in x^{m-k} che contenga C_k è evidentemente BC_kx^{m-k}.

190. Applichiamo il metodo precedente a un esempio. Si debba dividere

$$x^6+A_1x^5+A_2x^4+A_3x^3+A_4x^2+A_5x+A_6,$$

per

$$x^2+px+q.$$

Il quoziente sarà di 4° grado. Rappresentiamolo con

$$x^4+m_1x^3+m_2x^2+m_3x+m_4.$$

Moltiplicandolo per il divisore, si ottiene

$$x^6+(p+m_1)x^5+(q+pm_1+m_2)x^4+(qm_1+pm_2+m_3)x^3$$
$$+(qm_2+pm_3+m_4)x^2+(qm_3+pm_4)x+qm_4.$$

Eguagliando i termini di questo prodotto, di grado maggiore di uno, ai corrispondenti del dividendo, avremo, per determinare m_1, m_2, m_3, m_4, le equazioni

$$p+m_1=A_1,\quad q+pm_1+m_2=A_2,\quad qm_1+pm_2+m_3=A_3,$$
$$qm_2+pm_3+m_4=A_4.$$

La prima darà m_1; conosciuto m_1, la seconda darà m_2; trovati m_1 e m_2, la terza farà conoscere m_3; e finalmente la quarta determinerà m_4.

191. Il metodo dei coefficienti indeterminati si applica facilmente alla estrazione della radice di un polinomio.

Sia un polinomio

$$Ax^p+A_1x^{p-1}+\ldots\ldots+A_p;$$

rappresentiamone la radice m^{esima} con

$$Bx^n+B_1x^{n-1}+\ldots\ldots+B_n.$$

Bisogna, secondo la definizione, che si abbia identicamente

$$(Bx^n+B_1x^{n-1}+\ldots\ldots+B_n)^m=Ax^p+A_1x^{p-1}+\ldots\ldots+A_p.$$

Affinchè i due membri siano dello stesso grado, dovrà essere

$$p=mn.$$

Dunque, se p non è un multiplo di m, il problema sarà impossibile. Se p sarà divisibile per m, conosceremo il grado $\frac{p}{m}$ della radice, e quindi il numero dei coefficienti della medesima. Inalzando questa radice alla potenza m, il risultato sarà un polinomio di grado p, ed eguagliando i primi $n+1$ termini ai corrispondenti del polinomio proposto, avremo $n+1$ equazioni per determinare i coefficienti. Le equazioni che esprimono l'eguaglianza degli altri termini dovranno essere verificate dai valori già trovati; saranno equazioni di condizione.

192. Le $n+1$ equazioni che determinano i coefficienti della radice hanno una forma che ne rende facilissima la soluzione.

La prima equazione contiene la sola incognita B.

Conosciuta B, la seconda darà B_1, che vi comparisce soltanto al primo grado.

Trovati B e B_1, si ricava dalla terza equazione B_2, che vi comparisce soltanto al primo grado. In generale, ogni equazione contiene al primo grado un' incognita che non compariva nelle precedenti, e dà il modo di determinarla.

Per provarlo, osserviamo che effettuando la potenza

$$(Bx^n+B_1x^{n-1}+\dots+B_n)^m,$$

B_k non comparirà in alcun termine di grado maggiore di $mn-k$; in modo che le prime k equazioni non conterranno questa incognita. La $(k+1)^{esima}$ conterrà B_k al primo grado, perchè non si può avere altro che un sol termine in x^{mn-k} in cui comparisca B_k, e questo è $mB_kx^{n-k}(Bx^n)^{m-1}$ (171').

Applicazione ad alcuni problemi.

193. Applicheremo il metodo dei coefficienti indeterminati a problemi che non abbiamo ancora risoluti.

PROBLEMA 1°. *Determinare la relazione necessaria affinchè il trinomio* x^3+px+q *sia divisibile per il quadrato di un binomio convenientemente scelto,* $(x-\alpha)^2$.

Se $x+\beta$ indica il quoziente di questa divisione, avremo

$$x^3+px+q=(x-\alpha)^2(x+\beta)=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)(x+\beta)$$
$$=x^3+(\beta-2\alpha)x^2+(\alpha^2-2\alpha\beta)x+\alpha^2\beta\,;$$

onde, eguagliando i termini corrispondenti dei due membri,

$$\beta-2\alpha=o,\quad p=\alpha^2-2\alpha\beta,\quad q=\alpha^2\beta.$$

Sostituendo nella seconda e nella terza equazione a β il

valore 2α dedotto dalla prima, si ha

$$p=\alpha^2-4\alpha^2=-3\alpha^2, \quad q=2\alpha^3.$$

La prima equazione dà $\alpha=\sqrt{\frac{-p}{3}}$, e con questo valore di α, la seconda prende la forma

$$q=2\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3,$$

ossia

$$4p^3+27q^2=o.$$

Problema 2°. *Determinare i coefficienti* m *e* n *in modo che l'espressione*

$$mx^3-(2m^2+3n)x^2+(m^3+6mn)x-3m^2n$$

sia un cubo perfetto.

Eguagliamo i termini di questa espressione ai corrispondenti del cubo di un binomio $ax+b$, cioè ad

$$a^3x^3+3a^2bx^2+3ab^2x+b^3;$$

avremo

$$a^3=m,\ -(2m^2+3n)=3a^2b,\ m^3+6mn=3ab^2,\ -3m^2n=b^3$$

Le due ultime danno

$$b=-\sqrt[3]{3m^2n}, \qquad a=\frac{m^3+6mn}{3\sqrt[3]{9m^4n^2}};$$

determinate a e b, le altre due equazioni saranno equazioni di condizione. Sostituendo ad a e a b i loro valori, esse divengono

$$(1) \qquad m=\frac{(m^3+6mn)^3}{27.9m^4n^2},$$

$$(2)\ 2m^2+3n=\frac{3(m^3+6mn)^2\sqrt[3]{3m^2n}}{9\sqrt[3]{81m^8n^4}}=\frac{(m^3+6mn)^2}{3\sqrt[3]{27m^6n^3}}=\frac{(m^3+6mn)^2}{9m^2n}.$$

Mandando via i denominatori e sopprimendo il fattore comune m^2, la equazione (2) diviene

$$9n(2m^2+3n)=m^4+12m^2n+36n^2,$$

e riducendo,

$$o=9n^2-6m^2n+m^4,$$

che dà per valore unico di n

$$n=\frac{m^2}{3}.$$

Questo valore di n, sostituito nella equazione (1), la rende identica; dunque la condizione richiesta si riduce a

$$n=\frac{m^3}{3},$$

e il polinomio proposto è allora eguale, come si verifica facilmente, al cubo di $x\sqrt[3]{m}-m\sqrt[3]{m}$.

Esercizi.

1°. Determinare le condizioni necessarie affinchè

$$4x^4-4px^3+4qx^2+2p(m+1)x+(m+1)^2,$$

sia il quadrato di un polinomio intero rapporto a x.

2°. Trovare le condizioni che debbono verificarsi affinchè

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F,$$

sia il prodotto di due espressioni di primo grado in x e in y. Decomporre in questo modo

$$2x^2-21xy-11y^2-x+34y-3.$$

3°. Porre l' espressione

$$4(x^4+x^3+x^2+x+1),$$

sotto la forma della differenza dei quadrati di due polinomi interi, di secondo grado rapporto a x.

4°. Condizioni perchè

$$k(a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2)-(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2,$$

sia il quadrato di un polinomio in x e in y,

5°. Porre $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ sotto la forma $(\alpha x+\beta y)+(\gamma x+\delta y)^2$. È sempre possibile? Vi sono più soluzioni?

6°. Mettere $Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3$ sotto la forma

$$(\alpha x+\beta y)^3+(\gamma x+\delta y)^3.$$

CAPITOLO XVII.

VERIFICAZIONE DELLE FORMULE D'ALGEBRA.

Condizione d'identità di due polinomi.

194. Per verificare una formula d'Algebra bisogna dimostrare la eguaglianza di due espressioni algebriche. Premettiamo un teorema molto importante che può servire di guida nel risolvere questo genere di questioni.

TEOREMA. *Due polinomi interi e razionali che contengono un numero qualunque di lettere arbitrarie, e indipendenti l'una dall'altra, non possono essere eguali se non sono composti identicamente delli stessi termini.*

Consideriamo prima due polinomi che contengono una sola lettera indeterminata, rapporto alla quale li supporremo ordinati. Siano questi polinomi

$$(1) \qquad Px^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\ldots.+P_{m-1}x+P_m,$$
$$(2) \qquad Qx^n+Q_1x^{n-1}+Q_2x^{n-2}+\ldots.+Q_{n-1}x+Q_n,$$

dove P, $P_1, \ldots. P_m$, Q, $Q_1, \ldots. Q_n$ sono numeri determinati.

Se i due polinomi (1) e (2) devono essere eguali, qualunque sia x, saranno eguali anche per $x=o$, e quindi dovrà essere $P_m=Q_n$. Sopprimendo questi due termini comuni, i resti dovranno essere eguali, e dividendoli ambedue per x, si dovranno avere quozienti eguali, e quindi

$$Px^{m-1}+P_1x^{m-2}+\ldots.+P_{m-1}=Qx^{n-1}+Q_1x^{n-2}+\ldots.+Q_{n-1}.$$

Ponendo $x=o$, nei due membri di questa equazione, si vedrà egualmente che deve essere $P_{m-1}=Q_{n-1}$. Sopprimendo questi termini comuni e dividendo il risultato per x, si trova

$$Px^{m-2}+P_1x^{m-3}+\ldots+P_{m-2}=Qx^{n-2}+Q_1x^{n-3}+\ldots+Q_{n-2},$$

onde concluderemo $P_{m-2}=Q_{m-2}$, e così continuando, vedremo che i termini dovranno essere nei due polinomi li stessi e nello stesso numero.

Osservazione. Si potrebbe obiettare alla dimostrazione precedente, che dopo avere diviso per x i due polinomi eguali, non si può più (43) supporre $x=o$ nel risultato. Ma poichè si può attribuire a x ogni altro valore piccolo quanto si vuole, sarà sempre vero che i termini indipendenti da questa lettera non possono differire l'uno dall'altro.

195*. Una dimostrazione, alla quale non può farsi l'obiezione precedente, si fonda sul seguente

Teorema. *Un polinomio intero e razionale, di grado* m *rapporto a una lettera* x, *non può annullarsi per più di* m *valori differenti di* x, *senza che i suoi coefficienti siano tutti eguali a zero.*

Supponiamo che un polinomio P di grado m si annulli per gli $m+1$ valori della lettera ordinatrice x,

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \ldots\ldots \quad a_{m+1}.$$

Avremo che (147) P dovrà essere divisibile per i binomi primi

$$x-a_1, \quad x-a_2, \quad x-a_3 \ldots\ldots x-a_{m+1},$$

e quindi anche per il loro prodotto (152*) che è un polinomio di grado $m+1$, e questo è evidentemente impossibile, se P non ha eguali a zero tutti i suoi coefficienti.

196'. Se abbiamo

$$Px^m+P_1x^{m-1}+\dots+P_m=Qx^n+Q_1x^{n-1}+\dots+Q_n,$$

qualunque sia x; sarà

$$(P_m-Q_n)+(P_{m-1}-Q_{n-1})x+(P_{m-2}-Q_{n-2})x^2\dots+Px^m=o$$

ossia un polinomio di grado m dovrà annullarsi per un numero infinito di valori di x; dunque (195') tutti i coefficienti dovranno essere nulli, e avremo

$$P_m=Q_n,\quad P_{m-1}=Q_{n-1}\dots.$$

197. Per dimostrare il teorema nel caso in cui i due polinomi contengono un numero qualunque di variabili, basta provare che, se la proposizione è vera per due polinomi che contengono n lettere arbitrarie, sarà vera anche per due polinomi che ne contengono $n+1$. Consideriamo due polinomi che contengono $n+1$ lettere $x, y, z, u, v, \dots p$; ordiniamoli ambedue rapporto a una di queste lettere, per esempio rapporto ad x: prenderanno la forma:

(1) $\quad A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\dots+A_m,$

(2) $\quad B_0x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\dots+B_n,$

ove A_0, $A_1, \dots A_m$, B_0, $B_1, \dots B_n$ contengono soltanto le n variabili $y, z, u \dots p$; ma i polinomi (1) e (2) sono eguali, qualunque sia x, dunque dovrà essere

(3) $\quad m=n,\ A_0=B_0,\ A_1=B_1, \dots A_m=B_n;$

ora il teorema è ammesso per il caso di n lettere variabili; e quindi affinchè siano verificate le equazioni (3), i polinomi A_0 e B_0, A_1 e $B_1 \dots$ dovranno essere composti dei medesimi termini, e per conseguenza, i polinomi (1) e (2) devono essere identicamente li stessi.

Verificazione della eguaglianza di due espressioni algebriche.

198. Dal teorema precedente si deduce che per verificare una equazione tra differenti quantità arbitrarie, basta farne sparire tutti i denominatori e i radicali, e assicurarsi che i due membri sono composti identicamente di termini eguali. Se questo non fosse, si potrebbe affermare che l'eguaglianza proposta non è esatta per tutti i valori delle lettere che contiene.

199. Quando una eguaglianza dev'essere sodisfatta in forza di relazioni tra le lettere in essa contenute, per verificarla bisogna esprimere per mezzo di queste relazioni un certo numero di lettere in funzione di quelle che si possono riguardare come arbitrarie, e sostituire questi valori nell'equazione proposta, che rientrerà così nel caso precedente.

Applicazione ad alcuni problemi.

Problema 1°. *Esaminare se quando si hanno le equazioni*

$$(1) \qquad \frac{\gamma}{c_1}+\frac{c}{\gamma_2}=1,$$

$$(2) \qquad \frac{\gamma_1}{c_2}+\frac{c_1}{\gamma}=1,$$

è verificata anche la seguente:

$$(3) \qquad cc_1c_2+\gamma\gamma_1\gamma_2=o.$$

Si deduce dalle equazioni (1) e (2)

$$(4) \qquad \gamma=c_1-\frac{cc_1}{\gamma_2}=\frac{c_1(\gamma_2-c)}{\gamma_2},$$

(5) $$\gamma_1 = c_2 - \frac{c_1 c_2}{\gamma},$$

e, sostituendo, nella (5), a γ il suo valore dato dalla (4),

(6) $$\gamma_1 = \frac{-cc_2}{\gamma_2 - c},$$

Ponendo nella (3) i valori di γ e γ_1 dati dalla (4) e dalla (6), si ottiene

$$cc_1c_2 - \frac{c_1(\gamma_2 - c)cc_2\gamma_2}{\gamma_2(\gamma_2 - c)} = o,$$

che diviene una identità, sopprimendo il fattore $\gamma_2(\gamma_2 - c)$ comune al numeratore e al denominatore del secondo termine.

PROBLEMA 2°. *Esaminare se la equazione*

(1) $$\frac{ac - db}{a - b - d + c} = \frac{a + b + c + d}{4},$$

è verificata quando esiste la relazione

(2) $$\frac{ad - bc}{a - b - c + d} = \frac{ac - bd}{a - b - d + c}.$$

Seguendo il metodo indicato (199) bisogna dedurre dalla eguaglianza (2) il valore di una lettera, e sostituirlo nella (1) che deve allora divenire identica.

Mandando via i denominatori dalla (2), abbiamo

$$a^2d - ad(b + d - c) - bca + bc(b + d - c)$$
$$= a^2c - abd - ac(b + c - d) + bd(b + c - d),$$

e riunendo i termini con a e riducendo,

(3) $$a^2(d - c) + a(c^2 - d^2) + b^2(c - d) + b(d^2 - c^2) = o,$$

e dividendo per $d - c$

$$a^2 - b^2 - a(c + d) + b(c + d) = o,$$

che può scriversi

$$(4)\qquad a^2-b^2+(b-a)(c+d)=o,$$

e dividendo per $a-b$,

$$a+b-c-d=o,$$

cioè

$$a=c+d-b.$$

Sostituendo questo valore di a nella eguaglianza (1), si ha

$$\frac{c^2+cd-cb-bd}{2c-2b}=\frac{2c+2d}{4},$$

e mandando via i denominatori

$$4(c^2+cd-cb-bd)=(2c-2b)(2c+2d),$$

che è una identità.

OSSERVAZIONE. Abbiamo soppresso nelle equazioni (3) e (4) i fattori $a-b$ e $d-c$; il risultato non può dunque ammettersi altro che quando queste due differenze non sono nulle. Difatti, può verificarsi che per $a=b$ la (2) diviene identica, e quindi non esprime alcuna relazione tra le lettere che contiene.

Esercizi.

1°. Verificare che

$$x^2+y^2=u^2+v^2,$$

è sodisfatta quando esistono le relazioni

$$x+y+u+v=2,\qquad xy-uv=2-2(u+v).$$

2°. Verificare che si ha la proporzione

$$a:b::c:d,$$

se

$$a+c=2b,\qquad \frac{1}{b}+\frac{1}{d}=\frac{2}{c}.$$

3°. Verificare che il volume di un segmento sferico a due basi $\frac{1}{6}\pi H^3+\pi H\left(\frac{R^2+r^2}{2}\right)$ è la differenza di due segmenti a una base, che hanno per raggi delle basi R e r, cioè che è eguale a

$$\frac{1}{6}\pi H'^3+\frac{\pi H'R^2}{2}-\frac{1}{6}\pi h'^3-\frac{\pi h'r^2}{2},$$

H' e h' sodisfacendo alle condizioni che la geometria indica con facilità:

$$H'-h'=H,\quad \rho^2=R^2+(\rho-H')^2,\quad \rho^2=r^2+(\rho-h')^2,$$

essendo ρ il raggio della sfera.

4°. Verificare che

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)}.$$

Se

$$A:a::B:b::C:c::D:d.$$

5°. Rappresentando con S_m la somma dei primi m termini di una progressione per quoziente, che ha q per ragione, la somma dei prodotti due a due di questi m primi termini è

$$\frac{q}{q+1}S_m S_{m-1}.$$

6°. Dimostrare che, nella serie 1, 2, 3, 5, 8, 13... nella quale ciascun termine è eguale alla somma dei due precedenti, la differenza tra il quadrato d'un termine e il prodotto dei due che lo comprendono è eguale, in valore assoluto, all'unità.

7°. $$\frac{y-\beta}{x-\alpha}=\frac{y-\beta'}{x-\alpha'}$$

è conseguenza di

$$\sqrt{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2}+\sqrt{(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2}=\sqrt{(\beta-\beta')^2+(\alpha-\alpha')^2}.$$

8°. Le equazioni

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=1, & \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''&=0,\\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2&=1, & \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''&=0,\\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2&=1, & \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'&=0,\end{aligned}$$

danno

$$\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1,\qquad \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0,$$
$$\beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1,\qquad \alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''=0,$$
$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1,\qquad \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0,$$
$$\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2+\beta^2\beta'^2\beta''^2+\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2+\alpha'^2\beta'^2\gamma'^2+\alpha''^2\beta''^2\gamma''^2.$$

9°. L'equazione

$$\frac{1}{a+x}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x+a'}+\frac{1}{x+b'},$$

non può essere verificata, qualunque sia x, altro che se a' e b' sono rispettivamente eguali ad a e a b.

10°. L'equazione

$$\frac{a}{(b+x)^2+a^2}=\frac{a'}{(b'+x)^2+a'^2},$$

non può essere verificata, qualunque sia x, se non è $a=a'$, $b=b'$.

11°. Le equazioni

$$aa_1+bc=\beta\gamma,\qquad \beta\beta'+bb'=a_1c_1,$$
$$a'a_1+b'c'=\beta'\gamma',\qquad \gamma\gamma'+cc'=a_1b_1,$$

danno

$$a_1b_1c_1=aa'a_1+bb'b_1+cc'c_1+a'bc+ab'c'.$$

CAPITOLO XVIII.

SOPRA LE ESPRESSIONI IMAGINARIE.

Definizioni e notazioni.

200. La risoluzione delle equazioni di secondo grado conduce, in alcuni casi (92), ad espressioni che non hanno alcun valore numerico, e contengono l'indicazione di operazioni che non si possono effettuare. Sono state ammesse nell'algebra queste espressioni imaginarie, per conservare alle teorie la generalità che è propria di questa scienza. Abbiamo veduto, per esempio, che ammettendole si possono enunciare senza restrizione alcuni teoremi, come i seguenti:

Ogni equazione di secondo grado ha due radici.

In ogni equazione di secondo grado della forma $x^2+px+q=o$, la somma delle radici è eguale al coefficiente del secondo termine, preso con segno contrario, e il loro prodotto al termine tutto cognito.

L'utile che ne abbiamo in questo caso è ben piccolo, ma diviene molto grande nella teorica generale delle equazioni.

201*. Per mezzo dell'espressioni imaginarie si dimostrano con molta semplicità alcune formule algebriche. Il principio che serve di fondamento a queste dimostrazioni è il seguente: quando siamo certi che due serie di operazioni differenti, effettuate sopra espressioni imaginarie, debbono dare resultati identici, se ne pos-

sono dedurre due formule, eguagliando tra loro le parti reali e le imaginarie dei medesimi resultati.

Le espressioni imaginarie possono anche servire utilmente nella soluzione di alcuni problemi. Per intendere come questo possa accadere, basta riflettere che, molte volte, per risolvere un problema, torna comodo introdurre nel calcolo una o più incognite *ausiliarie*, che rappresentano grandezze, l'esistenza delle quali non è per niente necessaria perchè possano esistere le incognite *principali*, cioè le quantità che si vogliono determinare. Se per le incognite ausiliarie si trovano valori imaginari, cioè se non esistono, non ne segue che il problema sia impossibile, e potremo valerci delle espressioni imaginarie trovate per quelle, come mezzo analitico per ottenere i valori reali delle incognite principali.

202. Si chiama numero imaginario una espressione della forma $\sqrt{-k}$, dove k indica un numero reale positivo; si chiama espressione imaginaria o *numero complesso*, una espressione della forma $a+\sqrt{-k}$, dove a è un numero reale qualunque e k un numero reale positivo. Un numero imaginario si riguarda come un numero complesso, in cui la parte reale è eguale a zero. $\sqrt{-k}$ non è un numero nel significato ordinario di potere rappresentare la misura di una grandezza; ma se ne può utilmente fare uso nei calcoli, colla condizione che al suo quadrato si sostituisca $-k$. Applicando inoltre ai numeri complessi tutte le regole dimostrate generalmente per i numeri reali, le operazioni relative a questi numeri saranno sufficientemente definite e daranno sempre, come vedremo, risultati della loro forma.

203. $-k$, essendo negativo, può essere rappresentato da un quadrato preso con segno contrario, $-b^2$; il tipo di un numero complesso diviene allora

$$a+\sqrt{-b^2},$$

che suole scriversi

$$a+b\sqrt{-1}\ (^*).$$

Osservazione. Si sostituisce a $\sqrt{-b^2}$ l'espressione $b\sqrt{-1}$, per la convenzione che abbiamo fatta di applicare ai numeri imaginari tutte le regole dimostrate per i numeri reali. $-b^2$ può essere considerato come il prodotto $b^2\times(-1)$ e, per una regola dimostrata generalmente per i numeri reali, si può fare escire il fattore b^2 di sotto il radicale.

204. Qualunque siano i numeri reali a e b, il numero complesso

$$a+b\sqrt{-1}$$

è radice di una equazione di secondo grado

$$(x-a)^2+b^2=0.$$

La seconda radice di questa equazione è, come si vede facilmente,

$$a-b\sqrt{-1}.$$

$a+b\sqrt{-1}$ e $a-b\sqrt{-1}$ si dicono numeri complessi *coniugati:* essi godono (95) la proprietà di avere una somma reale $2a$ e un prodotto reale a^2+b^2, il quale si chiama anche *norma* dei due numeri complessi.

Potenze di $\sqrt{-1}$.

205. Nei calcoli che si effettuano sopra le espressioni della forma $a+b\sqrt{-1}$, si applicano (202) a queste espressioni tutte le regole del calcolo algebrico, operando

(*) Nella *Teorica dei numeri* si dimostra che le espressioni imaginarie, nelle quali la parte reale e il coefficiente di $\sqrt{-1}$ sono numeri interi, godono proprietà analoghe a quelle dei numeri interi reali: è per questo che si chiamano *numeri*. (T.).

come se $\sqrt{-1}$ fosse un numero. Alcuni geometri rappresentano questo simbolo con una lettera i, e nei risultati sostituiscono -1 a i^2: in questo modo restano determinate le potenze successive di i o $\sqrt{-1}$.

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{-1})^3 &= i^3 = i^2 \times i = -\sqrt{-1}, \\
(\sqrt{-1})^4 &= i^4 = (i^2)^2 = 1, \\
(\sqrt{-1})^5 &= i^5 = i^4 \times i = i = \sqrt{-1},
\end{aligned}
$$

e così di seguito. In generale, indicando con n un numero intero, si ha

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{-1})^{4n} &= i^{4n} = 1, \\
(\sqrt{-1})^{4n+1} &= i^{4n} \times i = \sqrt{-1}, \\
(\sqrt{-1})^{4n+2} &= i^{4n} \times i^2 = -1, \\
(\sqrt{-1})^{4n+3} &= i^{4n} \times i^3 = -\sqrt{-1}.
\end{aligned}
$$

Tutte queste convenzioni sono necessarie per potere applicare nel calcolo dei numeri complessi le regole generali relative ai numeri reali. Esse ci permettono di dimostrare il seguente teorema, la molta importanza del quale è evidente per quello che abbiamo detto (201*).

Prodotto dei numeri complessi.

206. Teorema 1°. *Effettuando colle regole della moltiplicazione algebrica il prodotto di più numeri complessi*

$$(a_1+b_1\sqrt{-1}),\ (a_2+b_2\sqrt{-1}),\ (a_3+b_3\sqrt{-1}) \ldots (a_n+b_n\sqrt{-1}),$$

e sostituendo alle potenze di $\sqrt{-1}$ i valori dati di sopra, qualunque sia l' ordine col quale si opera, il risultato sarà identicamente lo stesso, cioè si otterrà sempre la stessa parte reale e lo stesso coefficiente di $\sqrt{-1}$.

Infatti, ponendo i invece di $\sqrt{-1}$ e moltiplicando, i risultati saranno identici qualunque sia l' ordine con cui

si effettuano le moltiplicazioni successive, e i coefficienti delle diverse potenze di i avranno in tutti i casi lo stesso valore. Dunque se nei polinomi identici che si ottengono, alle potenze di i si sostituiscono i valori dati di sopra, cioè 1 a i^{4n}, $\sqrt{-1}$ a i^{4n+1}, -1 a i^{4n+2} e $-\sqrt{-1}$ a i^{4n+3}, i resultati non potranno essere differenti; ora è lo stesso sostituire, soltanto alla fine del calcolo, a ogni potenza di i il suo valore, o fare successivamente le sostituzioni dopo ogni operazione parziale, perchè queste operazioni si riducono tutte a sostituire -1 a due fattori eguali ad i, e poco importa che si facciano tutte queste sostituzioni in una sola volta o successivamente.

207. Daremo subito un' applicazione del teorema precedente.

Consideriamo il prodotto

$$P=(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1});$$

moltiplicando i primi due fattori, si trova

$$(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})=(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1},$$

e moltiplicando i due ultimi,

$$(a-b\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})=(ac-bd)-(ad+bc)\sqrt{-1};$$

di modo che

$$P=[(ac-bd)+(ad+bc)\sqrt{-1}][ac-bd)-(ad+bc)\sqrt{-1}],$$

ossia, effettuando il prodotto,

$$P=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Moltiplicando poi il primo fattore per il terzo, e il secondo per il quarto, si ha

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2+b^2,$$
$$(c+d\sqrt{-1})(c-d\sqrt{-1})=c^2+d^2;$$

dunque

$$P=(a^2+b^2)(c^2+d^2),$$

e quindi

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2,$$

formula che è facilissimo verificare direttamente.

208*. Teorema 2°. *Due prodotti di numeri complessi coniugati sono coniugati.*

Rappresentando $\sqrt{-1}$ con i, sia

$$P+Qi=(a+bi)(c+di)\ldots.$$

Se poniamo in ciascun fattore $-i$ invece d' i, risulterà nel prodotto mutato soltanto il segno alle potenze dispari d' i, e sostituendo alle potenze d' i i loro valori, la parte reale, che resulta dai coefficienti delle potenze pari, sarà la stessa, e il coefficiente di $\sqrt{-1}$, che resulta dai coefficienti delle potenze dispari, sarà soltanto mutato di segno; onde avremo

$$P-Qi=(a-bi)(c-di)\ldots.$$

Introduzione delle funzioni trigonometriche nelle espressioni imaginarie.

209. Le espressioni imaginarie possono porsi sotto una forma particolare che rende spesso più semplici i calcoli ai quali si devono sottoporre.

Sia l' espressione imaginaria

$$a+b\sqrt{-1};$$

ponendo

(1) $$a=\rho\cos\varphi,$$

(2) $$b=\rho\,\text{sen}\,\varphi,$$

si potrà, qualunque siano a e b, trovare per ρ un valore

positivo e per φ un valore minore di 2π, che sodisfacciano a queste due equazioni: basterà prendere

$$\rho^2 = a^2 + b^2, \tag{3}$$

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{b}{a}. \tag{4}$$

Difatti le equazioni (3) e (4) si deducono da (1) e (2) sommando i loro quadrati, e dividendo membro a membro. Reciprocamente, se ρ e φ avranno i valori dati dalle equazioni (3) e (4), avremo

$$\cos\varphi = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tang}^2\varphi}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{\text{tang}\,\varphi}{\pm\sqrt{1+\text{tang}^2\varphi}} = \frac{\frac{b}{a}}{\pm\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}},$$

e sostituendo ρ a $\sqrt{a^2+b^2}$,

$$\cos\varphi = \frac{a}{\pm\rho},$$

$$\text{sen}\,\varphi = \frac{b}{\pm\rho},$$

cioè

$$a = \pm\rho\cos\varphi, \qquad b = \pm\rho\,\text{sen}\,\varphi,$$

che coincideranno colle equazioni (1) e (2), prendendo per φ quello dei due angoli che avendo per tangente $\frac{b}{a}$, ha il suo seno dello stesso segno di b.

Da questo si deduce, che un' espressione imaginaria può sempre porsi sotto la forma

$$\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,.\,\text{sen}\,\varphi),$$

e non può ridursi alla medesima altro che in un sol modo (ρ dovendo essere positivo e $\varphi < 2\pi$).

ρ si chiama il modulo, e φ l' argomento di questa espressione imaginaria.

Espressione della posizione di un punto in un Piano per mezzo di un numero complesso.

210*. La posizione di un punto sopra una linea è determinata dalla misura della sua distanza da un punto fisso della medesima, la quale è data da un numero, che si prende positivo se la distanza è misurata da sinistra a destra, negativo se da destra a sinistra (83): in guisa che un numero reale, positivo o negativo, può esprimere la posizione di un punto sopra una linea.

La posizione di un punto M in un Piano, è determinata dalla misura ρ della sua distanza PM da un punto fisso P che suol chiamarsi *polo*, e dalla misura φ dell' angolo MPB che PM fa con una retta fissa PB; onde, facendo la convenzione che il modulo esprima il raggio vettore PM, l'argomento l' angolo polare MPB, un numero complesso $\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ potrà esprimere la posizione di un punto in un Piano.

Addizione e sottrazione dei numeri complessi.

211*. Si debba fare l' addizione dei due numeri complessi

$$\rho(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi),$$
$$\rho'(\cos\varphi' + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi'),$$

cioè, si debbano determinare il modulo P e l'argomento Φ della espressione

$$\rho \cos \varphi + \rho' \cos \varphi' + \sqrt{-1}\ (\rho \operatorname{sen} \varphi + \rho' \operatorname{sen} \varphi').$$

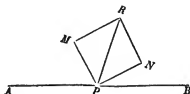
Per questo dovremo porre (209)

$$(1)\quad P^2 = (\rho \cos \varphi + \rho' \cos \varphi')^2 + (\rho \operatorname{sen} \varphi + \rho' \operatorname{sen} \varphi')^2,$$

$$(2)\qquad \operatorname{tang} \Phi = \frac{\rho \operatorname{sen} \varphi + \rho' \operatorname{sen} \varphi'}{\rho \cos \varphi + \rho' \cos \varphi'}.$$

Facendo i quadrati e riducendo colle note formule trigonometriche, la equazione (1) diviene

$$(3)\qquad P^2 = \rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi').$$

212*. Determiniamo la relazione che passa tra i punti M ed N rappresentati dagli addendi e il punto R rappresentato dalla somma

avremo

$$MP = \rho, \quad \varphi = MPB, \quad NP = \rho', \quad NPB = \varphi'.$$

Facciamo il parallelogrammo $PMRN$ sulle due rette PM e PN: avremo

$$\overline{PR}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{MR}^2 - 2PM \times MR \cos PMR;$$

ma

$$PM = \rho \qquad MR = PN = \rho',$$
$$PMR = \pi - MPN, \qquad MPN = MPB - NPB = \varphi - \varphi',$$

onde

$$PMR = \pi - (\varphi - \varphi'),$$
$$\cos PMR = -\cos(\varphi - \varphi'),$$

e quindi

$$PR^2 = \rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi');$$

e per la equazione (3), poichè PR e P devono essere ambedue positivi (209),

$$(4) \qquad PR = P.$$

Abbiamo inoltre

$$\frac{PM}{MR} = \frac{\text{sen}\, MRP}{\text{sen}\, MPR} = \frac{\text{sen}\, RPN}{\text{sen}\, MPR},$$

ma

$$RPN = RPB - \varphi',$$
$$RPM = \varphi - RPB,$$

onde

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\text{sen}\,(RPB - \varphi')}{\text{sen}\,(\varphi - RPB)},$$

ossia

$$\rho(\text{sen}\,\varphi \cos RPB - \text{sen}\, RPB \cos \varphi)$$
$$= \rho'(\text{sen}\, RPB \cos \varphi' - \text{sen}\,\varphi' \cos RPB).$$

Dividendo per $\cos RPB$, e ricavando il valore di $\dfrac{\text{sen}\, RPB}{\cos RPB} = \text{tang}\, RPB$, si ha

$$\text{tang}\, RPB = \frac{\rho\, \text{sen}\,\varphi + \rho' \text{sen}\,\varphi'}{\rho \cos \varphi + \rho' \cos \varphi'};$$

e confrontando colla (2), poichè tanto RPB quanto Φ devono essere minori di 2π (209), si rileva

$$(5) \qquad RPB = \Phi.$$

Dalle equazioni (4) e (5) si deduce che il punto rappresentato dalla somma di due numeri complessi è il

vertice, opposto al Polo, del parallellogrammo costruito sopra i raggi che vanno dal Polo ai punti rappresentati dagli addendi.

213*. Osservazione I. Se le forze si rappresentano, come si fa in meccanica, con linee rette, è chiaro che si potranno esprimere con numeri complessi; il modulo ne indicherà l'intensità, l'argomento la direzione, e avremo che l'addizione dei numeri complessi corrisponderà esattamente alla composizione delle forze espresse dai medesimi.

214*. Osservazione II. Il modulo della somma di due numeri complessi potendo rappresentare la lunghezza di un lato di un triangolo di cui gli altri due sono i moduli degli addendi, è evidente che dovrà essere minore della somma di questi e maggiore della differenza.

215*. Per fare la sottrazione di un numero complesso da un altro bisogna, seguendo la regola dei numeri reali, cangiare il segno al numero da sottrarsi e poi fare l'addizione. Dovendo sottrarre

$$\rho'(\cos\varphi'+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi')$$

da

$$\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi),$$

bisogna cangiare il segno al primo e poi sommarli. Ora, il segno è cangiato ponendo $\varphi'+\pi$ in luogo di φ'. Dunque per avere il punto rappresentato dalla differenza di due numeri complessi è evidente che basterà portare il punto rappresentato dal numero da sottrarsi a una stessa distanza da P in senso opposto, e comporre poi il parallellogrammo come nell' addizione.

Moltiplicazione e divisione dei numeri complessi.

216. Si debbano moltiplicare i due numeri complessi

$$\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi),$$
$$\rho'(\cos\varphi'+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi').$$

Effettuando il prodotto e sostituendo -1 al quadrato di $\sqrt{-1}$, si trova

$$\rho\rho'[\cos\varphi\cos\varphi'-\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi'+\sqrt{-1}(\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi'+\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi')]$$
$$=\rho\rho'[\cos(\varphi+\varphi')+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,(\varphi+\varphi')];$$

quindi, *per moltiplicare tra loro due numeri complessi, bisogna moltiplicare i moduli e sommare gli argomenti.*

La regola precedente permette, evidentemente, di fare il prodotto di quanti si vogliano numeri complessi.

217*. Per avere la posizione di un punto rappresentato da un numero complesso, dopo che ha rotato per un angolo φ intorno al polo, basta moltiplicare il numero complesso per $\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi$. La moltiplicazione corrisponde a una rotazione intorno al Polo.

218. Per dividere due numeri complessi, uno per l'altro, basta dividere i moduli e sottrarre gli argomenti, poichè si ha

$$\frac{\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)}{\rho'(\cos\varphi'+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi'}=\frac{\rho}{\rho'}[\cos(\varphi-\varphi')+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,(\varphi\quad\varphi')].$$

Questa eguaglianza diviene evidente mandando via il denominatore, ed effettuando la moltiplicazione nel secondo membro colla regola data (216).

È evidente che la divisione corrisponde a una rotazione in senso contrario a quello che corrisponde alla moltiplicazione.

Potenze di un numero complesso.

219. Supponendo i numeri complessi tutti eguali tra loro, i teoremi precedenti provano che

La potenza intera di un numero complesso ha per modulo la potenza corrispondente del modulo, e per argomento il prodotto dell' argomento per l' indice della potenza. Così avremo

$$(1)\quad [\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)]^m=\rho^m(\cos m\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,m\varphi).$$

Questa formula, importantissima nell' Analisi, si estende anche al caso in cui m rappresenta un numero frazionario o negativo.

Primieramente supponiamo sostituito $\frac{1}{m'}$ ad m, essendo m' intero: si dovrà dimostrare che

$$(2)\quad [\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)]^{\frac{1}{m'}}=\rho^{\frac{1}{m'}}\left(\cos\frac{\varphi}{m'}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{m'}\right).$$

Per verificare questa eguaglianza, inalziamo i due membri alla potenza m'; il primo darà evidentemente per risultato

$$\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi),$$

e la regola data per le potenze intere mostra che dà lo stesso risultato anche il secondo.

Osservazione. Dati $\cos\varphi$ e $\mathrm{sen}\,\varphi$, $\cos\frac{\varphi}{m}$ e $\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{m}$ non sono completamente determinati, e possono avere (vedi *Trigonometria*) più valori differenti. Ne risultano anche valori differenti per l' espressione

$$[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)]^{\frac{1}{m'}},$$

la discussione dei quali sarà fatta nella teorica delle equazioni.

220. Se consideriamo ora il caso in cui all' esponente m sia sostituito $\frac{m}{n}$, bisogna dimostrare che

$$(3)\ [\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi)]^{\frac{m}{n}}=\rho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi}{n}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{m\varphi}{n}\right).$$

Inalzare una espressione alla potenza $\frac{m}{n}$ vuol dire (35) prenderne la radice n^{esima} e inalzare il resultato alla potenza m^{esima}; ora le formule (1) e (2) permettono di fare successivamente queste due operazioni, e così siamo condotti alla formula (3).

221. Supponiamo finalmente che m abbia un valore negativo $-m'$; bisogna dimostrare che

$$[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi)]^{-m'}$$
$$=\rho^{-m'}(\cos-m'\varphi+\sqrt{-1}\operatorname{sen}-m'\varphi);$$

per questo osserviamo che, secondo una definizione (37),

$$[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi)]^{-m'}=\frac{1}{[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi)]^{m'}},$$

ora

$$\frac{1}{[\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi)]^{m'}}=\frac{1}{\rho^{m'}(\cos m'\varphi+\sqrt{-1}\operatorname{sen}m'\varphi)};$$

ma abbiamo

$$\frac{1}{\rho^{m'}(\cos m'\varphi+\sqrt{-1}\operatorname{sen}m'\varphi)}=\frac{\cos 0+\sqrt{-1}\operatorname{sen}0}{\rho^{m'}(\cos m'\varphi+\sqrt{-1}\operatorname{sen}m'\varphi)},$$
$$=\rho^{-m'}(\cos-m'\varphi+\sqrt{-1}\operatorname{sen}-m'\varphi),$$

che è quello che volevamo dimostrare.

222. Indicheremo alcune applicazioni delle formule precedenti.

TEOREMA. *Ogni trinomio della forma*

$$x^4+px^2+q$$

è decomponibile in due fattori reali di secondo grado.

Distingueremo due casi:

1°. Supponiamo che l'equazione di secondo grado

$$z^2+pz+q=o$$

abbia due radici reali α e β; avremo (97)

$$z^2+pz+q=(z-\alpha)(z-\beta),$$

e quindi

$$x^4+px^2+q=(x^2-\alpha)(x^2-\beta)$$

2°. Supponiamo che l'equazione

$$z^2+pz+q=o$$

abbia due radici imaginarie, $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$; sarà

$$z^2+pz+q=(z-\alpha-\beta\sqrt{-1})(z-\alpha+\beta\sqrt{-1}),$$

e quindi

$$(1)\quad x^4+px^2+q=(x^2-\alpha-\beta\sqrt{-1})(x^2-\alpha+\beta\sqrt{-1}).$$

L'equazione (1) può scriversi:

$$x^4+px^2+q$$
$$=(x+\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}})(x-\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}})(x+\sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}})$$
$$(x-\sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}}),$$

e ponendo

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\rho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi),$$
$$\alpha-\beta\sqrt{-1}=\rho(\cos\varphi-\sqrt{-1}\operatorname{sen}\varphi),$$

onde (219)

$$\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\sqrt{\alpha-\beta\sqrt{-1}}=\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}-\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\right),$$

si ha

$$x^4+px^2+q$$
$$=\left[(x-\sqrt{\rho}(\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2})\right]\left[(x+\sqrt{\rho}(\cos\frac{\varphi}{2}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2})\right]$$
$$\left[(x-\sqrt{\rho}(\cos\frac{\varphi}{2}-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2})\right]\left[(x+\sqrt{\rho}(\cos\frac{\varphi}{2}-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2})\right];$$

ossia, moltiplicando tra loro il primo col terzo fattore, e il secondo col quarto, che evidentemente sono coniugati

$$x^4+px^2+q$$
$$=\left[(x-\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2})^2+\rho\,\mathrm{sen}^2\frac{\varphi}{2}\right]\left[(x+\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2})^2+\rho\,\mathrm{sen}^2\frac{\varphi}{2}\right],$$

e il trinomio così rimane decomposto in due fattori reali di secondo grado.

PROBLEMA. *Esprimere* $\cos m\varphi$ *e* $\mathrm{sen}\, m\varphi$ *per mezzo di* $\cos\varphi$ *e di* $\mathrm{sen}\,\varphi$.

Abbiamo

$$(\cos\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi)^m=\cos m\varphi+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,m\varphi;$$

svolgendo il primo membro colla formula del binomio (165) ed eguagliando il risultato al secondo membro, cioè, scrivendo che le parti reali sono eguali tra loro, come pure i coefficienti di $\sqrt{-1}$, otterremo

$$\cos m\varphi=\cos^m\varphi-\frac{m(m-1)}{2}\cos^{m-2}\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}\varphi\,\mathrm{sen}^4\varphi+\ldots,$$
$$\mathrm{sen}\,m\varphi=m\cos^{m-1}\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\varphi\,\mathrm{sen}^3\varphi+\ldots$$

PROBLEMA. *Esprimere* $x^m+\frac{1}{x^m}$ *per* $x+\frac{1}{x}$.

Poniamo

$$x+\frac{1}{x}=2\cos\varphi;$$

se ne trae

$$x = \cos\varphi + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$
$$\frac{1}{x} = \cos\varphi - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

e quindi

$$x^m + \frac{1}{x^m} = 2\cos m\varphi,$$

in guisa che la formula che dà $\cos m\varphi$ per $\cos\varphi$, darà il modo di calcolare $x^m + \frac{1}{x^m}$ per mezzo di $x + \frac{1}{x}$.

Osservazione. Per ottenere la formula richiesta, abbiamo supposto che x abbia un valore immaginario

$$x = \cos\varphi + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi;$$

il risultato sarà esatto per un valore reale qualunque di x? Per dimostrare che la formula è generale, bisogna osservare che, quando sono stati mandati via i denominatori, è di grado $2m$, e sarà dimostrato nella teorica delle equazioni, che deve essere identica, se è verificata per più di $2m$ valori reali o imaginari della variabile.

Problema*. *Spezzare in due quadrati di numeri interi l' espressione*

$$(a^2+b^2)^m (a'^2+b'^2)^{m'} (a''^2+b''^2)^{m''} \ldots,$$

nella quale a, b, a′, b′...., m, m′.... *sono numeri interi.*

Sieno x^2, y^2, i due quadrati, si dovrà avere

$$(1)\qquad x^2+y^2 = (a^2+b^2)^m (a'^2+b'^2)^{m'} (a''^2+b''^2)^{m''} \ldots$$

Poichè

$$x^2+y^2 = (x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1}),$$
$$a^2+b^2 = (a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1}),$$
$$a'^2+b'^2 = (a'+b'\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

l'equazione (1) prende la forma

(2) $$(x+y\sqrt{-1})(x-y\sqrt{-1}) = (a+b\sqrt{-1})^m(a-b\sqrt{-1})^m(a'+b'\sqrt{-1})^{m'}(a'-b'\sqrt{-1})^{m'}\ldots$$

Ponendo

(3) $$x+y\sqrt{-1} = (a+b\sqrt{-1})^p(a-b\sqrt{-1})^{m-p}(a'+b'\sqrt{-1})^{p'}(a'-b'\sqrt{-1})^{m'-p'}\ldots$$

sarà (208')

(4) $$x-y\sqrt{-1} = (a-b\sqrt{-1})^p(a+b\sqrt{-1})^{m-p}(a'-b'\sqrt{-1})^{p'}(a'+b'\sqrt{-1})^{m'-p'}\ldots$$

Moltiplicando tra loro le equazioni (3) e (4), si ottiene la (2), che sarà sodisfatta dai medesimi valori che sodisfano a queste.

Ora effettuando, nella equazione (3) o nella (4) che n' è una conseguenza, le potenze e i prodotti indicati nel secondo membro, ed eguagliando la parte reale alla reale e il coefficiente di $\sqrt{-1}$ al coefficiente di $\sqrt{-1}$ del primo membro, si ricavano un valore intero per x e uno per y, che formeranno una delle soluzioni cercate.

Il valore di p potrà scegliersi a piacere tra i numeri 0, 1, 2, ..., m; quello di p' tra i numeri 0, 1, 2, ..., m', e così degli altri.

Esercizi.

1°. Dimostrare, senza valersi delle espressioni trigonometriche, che $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}$ è della forma $p+q\sqrt{-1}$.

2°. Trovare le radici reali o imaginarie dell' equazione

$$2x\sqrt[3]{x}-3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=20.$$

3°. Se n è un numero dispari primo con 3, $(x+y)^n-x^n-y^n$ si annulla per $x=y\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$.

4°. Risolvere l'equazione

$$x^6-2x^3\cos\varphi+1=0.$$

5°. Quali sono i numeri complessi che hanno reale la potenza m^{esima}.

6°. Trovare un numero complesso che abbia il cubo eguale all'unità. Ne esistono due, uno dei quali è il quadrato dell'altro.

7°. Rappresentando con α il numero complesso che ha il cubo eguale all'unità, verificare la formula

$$(a+b+c)(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha)=a^3+b^3+c^3-3abc;$$

dedurne la dimostrazione dell'ultima formula dell'esercizio 7° del Capitolo II.

CAPITOLO XIX.

TEORICA DELLE FRAZIONI CONTINUE.

—

Definizione.

223. Per dare un valore approssimato di un numero N, il modo più semplice è d' indicarne la parte intera. Rappresentando con a questa parte intera, il valore esatto potrà esprimersi nel modo seguente:

$$(1) \qquad N = a + \frac{1}{y},$$

$\frac{1}{y}$ essendo < 1, e quindi $y > 1$.

Per dare un valore approssimato di y, si potrà ancora calcolarne la parte intera, e indicandola con b, porre

$$y = b + \frac{1}{z},$$

dove $z > 1$. Sostituendo a y questo valore nella espressione (1), si ottiene

$$(2) \qquad N = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{z}}.$$

Si potrà egualmente calcolare la parte intera di z, e rappresentandola con c, porre

$$z = c + \frac{1}{u},$$

con $u > 1$. Questo valore di z, sostituito nella (2), dà

$$(3) \qquad N = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{u}}}.$$

Sostituendo egualmente ad u la sua parte intera d aumentata di $\frac{1}{v}$, si avrà

$$(4) \qquad N = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{v}}}},$$

e così potremo continuare indefinitamente, a meno che uno dei numeri $y, z, u, v, \ldots$ non sia intero, e allora l'operazione si arresterà, dando per il valore di N una espressione che dicesi *frazione continua*.

224. Anche quando le operazioni del paragrafo precedente non hanno mai termine, l'equazioni (1), (2), (3), (4).... sono rigorosamente esatte. Ma se vi trascuriamo le frazioni $\frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \ldots$, che sono minori dell'unità, divengono approssimate, e danno per N una serie di valori approssimati, che si dicono *ridotte*.

I numeri $b, c, d, \ldots$ che sono le parti intere dei denominatori successivi $y, z, u, \ldots$ si chiamano *quozienti incompleti*. $y, z, u, \ldots$ si dicono *quozienti completi*, e le frazioni $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \ldots$ *frazioni integranti*.

Teoremi relativi alla rappresentazione dei numeri per frazioni continue.

225. Le ridotte che si ottengono riducendo un numero qualunque in frazione continua, godono di notevoli proprietà che studieremo in questo capitolo.

TEOREMA 1°. *Il numero N è sempre compreso tra due ridotte consecutive, cioè, le ridotte sono alternativamente maggiori e minori di* N.

Riprendiamo l'equazioni (1), (2), (3), (4),....

$$N = a + \frac{1}{y}, \tag{1}$$

$$N = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{z}}, \tag{2}$$

$$N = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{u}}}, \tag{3}$$

$$N = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{v}}}}. \tag{4}$$

ec. . . . .

Poichè b è la sola parte intera di y, $\frac{1}{y}$ è minore di $\frac{1}{b}$ e compreso tra 0 e $\frac{1}{b}$. Se dunque si sostituiscono successivamente nella (1) a $\frac{1}{y}$ 0 e $\frac{1}{b}$, gli errori com-

messi saranno in senso inverso, e i resultati ottenuti a e $a+\frac{1}{b}$ comprenderanno N tra loro.

Poichè c è la sola parte intera di z, $\frac{1}{z}$ è minore di $\frac{1}{c}$ e compreso tra 0 e $\frac{1}{c}$. Dunque, se nella (2) si sostituiscono successivamente 0 e $\frac{1}{c}$ a $\frac{1}{z}$, gli errori commessi saranno in senso opposto, e i valori ottenuti $a+\frac{1}{b}$ e $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$ comprenderanno N tra loro.

Poichè d è la sola parte intera di u, $\frac{1}{u}$ è compreso tra 0 e $\frac{1}{d}$. Dunque, sostituendo successivamente nella (3) 0 e $\frac{1}{d}$ ad $\frac{1}{u}$, gli errori commessi saranno in senso opposto, e i resultati $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$ e $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}$ comprenderanno N tra loro.

Si potrebbe continuare indefinitamente, e provare così che N è compreso tra due ridotte consecutive qualunque.

226. Osservazione I. *Ogni ridotta è compresa tra le due che la precedono.*

Infatti, una ridotta qualunque

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\ldots+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r}}}}}$$

è una frazione continua, il valore della quale, per il teorema 1°, è compreso tra le due ridotte che si ottengono arrestandosi ai denominatori p e q: che è precisamente quello che volevamo dimostrare.

227. Osservazione II. Se rappresentiamo le diverse ridotte con lunghezze prese sopra una medesima linea retta, partendo da un punto O, e se poniamo all'estremità d'ogni lunghezza la cifra che esprime il numero d'ordine della ridotta corrispondente, la linea seguente indicherà l'ordine di grandezza col quale le ridotte si succedono:

0 1 3 5 7 6 4 2

228. Teorema 2°. *Ogni numero commensurabile dà origine ad una frazione continua limitata, e viceversa, ogni frazione continua limitata rappresenta un numero commensurabile.*

Un numero commensurabile è sempre il rapporto di due numeri interi: indichiamolo con $\frac{A}{B}$. Per ridurre $\frac{A}{B}$ in frazione continua bisogna (223) estrarne la parte intera. Sia a questa parte intera, e r il resto della divisione di A per B, avremo

$$\frac{A}{B}=a+\frac{r}{B}=a+\frac{1}{\left(\frac{B}{r}\right)}.$$

$\frac{B}{r}$ corrisponde al numero che di sopra abbiamo indicato con y.

Bisogna quindi (223) trovare la parte intera di y, cioè dividere B per r. Sia b il quoziente e r' il resto, sarà

$$\frac{B}{r}=b+\frac{r'}{r}=b+\frac{1}{\left(\frac{r}{r'}\right)}.$$

$\frac{r}{r'}$ corrisponde al numero indicato di sopra (223) con z. Così seguitando, si vede che il calcolo che dà i numeri interi $a, b, c, \ldots$ è precisamente quello che dovrebbe farsi per trovare il massimo comun divisore di A e B; dunque questo calcolo avrà termine, e quindi la frazione continua sarà limitata.

Viceversa, ogni frazione continua limitata rappresenta un numero commensurabile. Infatti, sia

$$(1) \qquad N = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ldots + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}}}}},$$

dove $a, b, c, \ldots p, q, r$, sono numeri interi. Le operazioni del secondo membro possono evidentemente effettuarsi con addizioni e divisioni di frazioni; dunque daranno per risultato una frazione con termini interi; quindi N sarà commensurabile.

Osservazione. Per effettuare l'operazioni del secondo membro dell'equazione (1), cominceremo da sommare q con $\frac{1}{r}$, poi divideremo l'unità per questa somma; sommeremo p col quoziente, poi divideremo l'unità per questa somma, e così di seguito. Almeno questo è il procedimento più naturale, e che basta per dimostrare il teorema 2°. Ma si può rendere più semplice, come vedremo studiando la legge di formazione delle ridotte.

Legge di formazione delle ridotte.

229. Data una frazione continua

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \ldots,}}}$$

si trova facilmente, per l'espressione delle prime ridotte,

$$a = a,$$

$$a + \frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b},$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = \frac{abc+a+c}{bc+1},$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}} = \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b},$$

e si scorge che ciascuna di queste frazioni può formarsi, moltiplicando i due termini della precedente per il quoziente incompleto al quale ci arrestiamo e sommando termine a termine la frazione così ottenuta con quella che precede di due posti.

Infatti,

$$\frac{abc+c+a}{bc+1} = \frac{(ab+1)c+a}{bc+1},$$

$$\frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b} = \frac{[(ab+1)c+a]d+ab+1}{(bc+1)d+b}.$$

Per dimostrare che questa legge di formazione è generale, supponiamo che sia verificata per le prime ri-

dotte, fino a quella che corrisponde a un quoziente μ. Dimostreremo che si estende anche alla ridotta seguente.

Sia $\frac{R}{R'}$ la ridotta ottenuta arrestandosi al quoziente incompleto μ, $\frac{Q}{Q'}$ e $\frac{P}{P'}$ quelle che la precedono, avremo secondo la legge ammessa

$$\frac{R}{R'}=\frac{Q\mu+P}{Q'\mu+P'}.$$

Ma i calcoli, mediante i quali abbiamo verificato che la legge vale per le prime ridotte, sono tutti algebrici; i quozienti incompleti vi compariscono rappresentati da lettere che possono esprimere tanto numeri interi quanto numeri frazionari; quindi nel resultato ottenuto potremo sostituire $\mu+\frac{1}{\mu'}$, a μ; così introdurremo un quoziente di più, μ', e avremo la ridotta che viene dopo $\frac{R}{R'}$, la quale, chiamata $\frac{S}{S'}$, sarà espressa da

$$\frac{S}{S'}=\frac{Q\left(\mu+\frac{1}{\mu'}\right)+P}{Q'\left(\mu+\frac{1}{\mu'}\right)+P'}=\frac{(Q\mu+P)\mu'+Q}{(Q'\mu+P')\mu'+Q'},$$

che è conforme alla legge enunciata.

230. Osservazione. La dimostrazione precedente non suppone che μ' sia intero, quindi si può, nel risultato ottenuto, sostituire a questo quoziente incompleto il quoziente completo corrispondente, che rappresenteremo con y. Otterremo così il valore esatto del numero stesso che è stato ridotto in frazione continua; questo valore è

$$N=\frac{Ry+Q}{R'y+Q'}.$$

Proprietà delle ridotte.

231. TEOREMA 1°. *La differenza di due ridotte consecutive è una frazione che ha per numeratore l'unità.*

Sieno $\frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}, \frac{R}{R'}$, tre ridotte consecutive; per quello che abbiamo dimostrato (229), è

$$\frac{R}{R'}=\frac{Q\mu+P}{Q'\mu+P'};$$

ora si ha identicamente

$$\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}=\frac{QP'-PQ'}{Q'P'},$$

$$\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Q\mu+P}{Q'\mu+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{QQ'\mu+PQ'-QQ'\mu-P'Q}{Q'(Q'\mu+P')}$$

$$=\frac{PQ'-P'Q}{Q'(Q'\mu+P')};$$

cioè le due differenze consecutive, $\frac{Q}{Q'}-\frac{P}{P'}$, $\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}$, hanno i numeratori eguali e di segno contrario; dunque il numeratore della differenza di due ridotte consecutive ha lo stesso valore assoluto, qualunque sia l'ordine di queste ridotte. Ora, considerando la prima e la seconda ridotta,

$$a \quad \text{e} \quad \frac{ab+1}{b},$$

si vede che la loro differenza $\frac{1}{b}$ ha per numeratore l'unità; dunque il valore constante dei numeratori delle differenze delle ridotte consecutive è l'unità.

232*. OSSERVAZIONE. Poichè le differenze succes-

sive, che si ottengono sottraendo da ciascuna ridotta quella che la precede, hanno i numeratori eguali all' unità presa alternativamente col segno $+$ e col segno $-$, e la differenza che si ha, sottraendo la prima dalla seconda, è positiva, è chiaro che sottraendo da una ridotta qualunque la precedente, si otterrà la differenza col segno $+$ o $-$, secondo che il posto della prima è pari o dispari, e quindi se il posto di una ridotta è il k^{esimo}, sottraendo la precedente, il numeratore della differenza sarà $(-1)^k$.

233. Teorema 2°. *Le ridotte che si ottengono colla legge di formazione esposta* (229) *sono frazioni irriducibili.*

Sieno $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{R'}$ due ridotte consecutive. Il numeratore della loro differenza è, secondo ciò che abbiamo dimostrato, eguale all' unità, cioè

$$PQ' - P'Q = \pm 1.$$

Da questa equazione si deduce che non può esistere nessun fattore comune a P e a P', perchè questo fattore dividerebbe i due termini della differenza $PQ' - P'Q$, e quindi dovrebbe dividere l' unità, che è impossibile.

234. Teorema 3°. *Due ridotte consecutive comprendono sempre tra loro il valore della frazione continua, e ogni ridotta si approssima al medesimo più della precedente.*

La prima parte di questa dimostrazione è già stata fatta (225) quando abbiamo provato che le ridotte sono alternativamente maggiori e minori del valore della frazione continua. Vediamo che può dedursi anch' essa facilmente dalle formule dimostrate.

Sieno $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$ due ridotte consecutive, e x il quoziente completo che viene dopo il quoziente incompleto a

cui ci siamo arrestati; il valore della frazione continua è eguale (230) a

$$\frac{Rx+Q}{R'x+Q'};$$

ora, si ha evidentemente,

$$\frac{Rx+Q}{R'x+Q'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{RQ'x-R'Qx}{Q'(R'x+Q')},$$

$$\frac{Rx+Q}{R'x+Q'}-\frac{R}{R'}=\frac{QR'-Q'R}{R'(R'x+Q')};$$

ma (231)

$$RQ'-R'Q=\pm 1,\quad R'Q-RQ'=\mp 1;$$

dunque

$$\frac{Rx+Q}{R'x+Q'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{\pm x}{Q'(R'x+Q')},$$

$$\frac{Rx+Q}{R'x+Q'}-\frac{R}{R'}=\frac{\mp 1}{R'(R'x+Q')},$$

e alla sola ispezione di questi resultati, si scorge che sono di segni opposti, e che il primo è maggiore in valore assoluto, poichè $x>1$ e $Q'<R'$.

235. Osservazione. Nessun numero può approssimarsi al valore di una frazione continua di più di una ridotta, senza essere compreso tra questa e la ridotta precedente. Infatti, sia m un numero che si approssimi al valore della frazione continua più della ridotta $\frac{R}{R'}$, a più forte ragione vi si approssimerà più della ridotta precedente $\frac{Q}{Q'}$; e poichè la frazione continua è compresa tra queste due ridotte, bisognerà evidentemente che anche m sia compreso tra le medesime.

236. Teorema 4°. *Una ridotta qualunque si approssima al valore di una frazione continua più di ogni altra frazione che abbia i termini più semplici.*

Affinchè una frazione $\frac{A}{B}$ si approssimi al valore della frazione continua più della ridotta $\frac{R}{R'}$, bisogna (235) che $\frac{A}{B}$ sia compresa tra $\frac{R}{R'}$ e la ridotta precedente $\frac{Q}{Q'}$; quindi la differenza $\frac{A}{B}-\frac{Q}{Q'}$ dev'essere minore in valore assoluto di $\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}$; ora, abbiamo

$$\frac{A}{B}-\frac{Q}{Q'}=\frac{AQ'-BQ}{Q'B},$$
$$\frac{R}{R'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{\pm 1}{Q'R'};$$

e poichè la prima di queste frazioni ha il numeratore non minore dell'unità, non può essere minore della seconda altro che se il suo denominatore è maggiore, cioè, altro che se $B>R'$.

Per provare inoltre che A dev'essere maggiore di R, osserviamo che $\frac{A}{B}$ è compreso tra $\frac{R}{R'}$ e $\frac{Q}{Q'}$, e quindi $\frac{B}{A}$ dev'essere compreso tra $\frac{R'}{R}$ e $\frac{Q'}{Q}$, e la differenza $\frac{B}{A}-\frac{Q'}{Q}$ dev'essere minore in valore assoluto di $\frac{R'}{R}-\frac{Q'}{Q}$; ora, abbiamo

$$\frac{B}{A}-\frac{Q'}{Q}=\frac{BQ-AQ'}{AQ},$$
$$\frac{R'}{R}-\frac{Q'}{Q}=\frac{\pm 1}{QR},$$

e la prima espressione non può evidentemente essere minore della seconda altro che se $A > R$.

237. Osservazione. Quest' ultimo teorema mostra il vantaggio che vi è nel ridurre un numero in frazione continua. Le ridotte daranno una serie di valori approssimati che saranno i più semplici possibili, avuto riguardo al grado di approssimazione ottenuto, e l' errore commesso, arrestandosi a una ridotta qualunque, sarà sempre minore della differenza tra questa ridotta e la seguente, cioè minore di una frazione che abbia per numeratore l'unità (231) e per denominatore il prodotto dei denominatori delle due ridotte.

Esempio 1°. *Trovare valori approssimati di* $\frac{5734}{6289}$ *espressi per frazioni più semplici possibili.*

Riducendo la frazione proposta in frazione continua, col metodo esposto (228), si trova

$$\frac{5734}{6289}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{61+\cfrac{1}{3}}}}}.$$

Le ridotte successive sono:

$$0,\ 1,\ \frac{10}{11},\ \frac{31}{34},\ \frac{1901}{2085},\ \frac{5734}{6289}.$$

I valori approssimati sono dunque queste differenti frazioni; ed è impossibile trovare frazioni più semplici che si approssimino di più; 1 e $\frac{31}{34}$, ridotte di posto pari, sono troppo grandi, $\frac{10}{11}$ e $\frac{1901}{2085}$, ridotte di posto dispari,

sono troppo piccole. L' errore commesso, sostituendo alla frazione data una di queste, è minore della differenza colla ridotta seguente. Per esempio, prendendo la ridotta $\frac{31}{34}$, si commetterà un errore minore di $\frac{1}{34 \times 2085}$, cioè minore di $\frac{1}{70890}$.

Esempio 2°. *Trovare valori appossimati della radice quadrata del numero* 10 *espressi da frazioni più semplici possibili.*

Poichè la parte intera di $\sqrt{10}$ è 3, poniamo

$$\sqrt{10} = 3 + \frac{1}{y};$$

se ne deduce

$$y = \frac{1}{\sqrt{10} - 3},$$

e moltiplicando i due termini di questa frazione per $\sqrt{10} + 3$,

$$y = \sqrt{10} + 3;$$

y è compresa tra 6 e 7; poniamo dunque

$$y = \sqrt{10} + 3 = 6 + \frac{1}{z},$$

onde

$$z = \frac{1}{\sqrt{10} - 3};$$

e quindi $z = y$. Dunque i calcoli si riproducono indefinitamente eguali e nel medesimo ordine, ed è facile a vedersi che avremo

$$\sqrt{10} = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \dots}}}$$

Dunque si otterranno per valori approssimati di $\sqrt{10}$ le

ridotte successive di questa frazione continua che sono:

$$3,\ \frac{19}{6},\ \frac{117}{37},\ \frac{721}{228},\ \frac{4443}{1405},\ \ldots.$$

Ciascuna si approssima più d'ogni altra frazione espressa in termini minori, e differisce da $\sqrt{10}$ di una quantità minore dell'unità divisa per il prodotto del suo denominatore moltiplicato per quello della ridotta seguente; per esempio, l'errore commesso prendendo $\sqrt{10}=\frac{721}{228}$ è minore di $\frac{1}{228\times1405}$ cioè minore di $\frac{1}{320340}$.

238. Quando si conoscono due valori approssimati di un numero, uno in più, l'altro in meno, riducendoli in frazione continua, i quozienti incompleti comuni alle due espressioni apparterranno anche al numero compreso tra loro. Infatti, se un numero x è compreso tra A ed A', ed

$$A=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\ldots,}}}}}$$

$$A'=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f'+\ldots,}}}}}$$

dico che riducendo x in frazione continua, si dovranno trovare necessariamente, per primi quozienti incompleti, a, b, c, d, e.

Infatti, poichè A ed A' hanno la stessa parte intera a, questa sarà anche la parte intera di x, che è compreso tra loro.

Ponendo

$$A=a+\frac{1}{y},\quad A'=a+\frac{1}{y'},\quad x=a+\frac{1}{x'},$$

poichè x è compreso tra A ed A', x' necessariamente sarà compreso tra y e y'; ora y e y' hanno ambedue la stessa parte intera b, dunque b sarà anche la parte intera di x'.

Ponendo

$$y=b+\frac{1}{z},\quad y'=b+\frac{1}{z'},\quad x'=b+\frac{1}{x''},$$

si vedrà, nello stesso modo, che x'' è compreso tra z e z', e che in conseguenza, la sua parte intera è c; e continuando così, si vede che la frazione continua che rappresenta x comincerà con le frazioni integranti

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}.$$

Applicazione. Il numero π è compreso tra 3,1415926 e 3,1415927; ora, riducendo queste due espressioni in frazioni continue, si trova

$$3{,}1415926=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{243+\ldots.}}}}$$

$$3{,}1415927 = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{354}}}}.$$

Se dunque riducessimo π in frazione continua si troverebbe

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{y}}}},$$

e le ridotte 3, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, godono la proprietà di approssimarsi a π, più delle frazioni che hanno i termini minori di loro.

Esercizi.

1°. Ridurre $\sqrt{a^2+1}$ in frazione continua.

2°. Ridurre in frazioni continue le espressioni

$$a + \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{c}} \qquad a + \cfrac{1}{b - \cfrac{1}{c - \cfrac{1}{d}}}$$

3°. Ogni frazione continua periodica rappresenta una radice di una equazione di secondo grado a coefficienti interi.

4°. Essendo A e B due numeri commensurabili, trovare un limite α tale che si possa, diminuendo A di una quantità $\alpha' < \alpha$, fare acquistare ad $A-\alpha'$ ed a B un massimo comun divisore almeno eguale ad ε.

5°. Verificare che

$$a+b=a-b+\cfrac{4ab}{2(a-b)+\cfrac{4ab}{2(a-b)+\cfrac{4ab}{2(a-b)+\dots}}}.$$

Trovare l'espressione del secondo membro, quando termini alla n^{esima} frazione.

6°. Se una radice di una equazione di secondo grado è rappresentata da una frazione continua, il periodo della quale comincia alla prima frazione integrante

$$x=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\text{ec}}}}}},$$

l'altra radice si otterrà dividendo -1 per questa stessa frazione col periodo scritto in ordine inverso.

CAPITOLO XX.

ANALISI INDETERMINATA DI PRIMO GRADO.

—

239. *L' Analisi indeterminata* è una parte importante della *Teorica dei Numeri.* Ha per iscopo di risolvere il seguente problema generale:

Date m *equazioni tra* m+n *incognite* x, y, z,.... *che hanno per coefficienti numeri interi positivi o negativi, trovare le loro soluzioni intere, cioè i sistemi di valori interi positivi o negativi, che sostituiti alle incognite* x, y, z,.... *verificano tutte le equazioni.*

Considereremo qui soltanto il caso in cui tutte le equazioni sono di primo grado, e primieramente supporremo che si tratti di una sola equazione con due incognite.

Condizione perchè l'equazione $ax+by=K$ ammetta soluzioni intere.

240. Se i numeri interi a, b e K hanno un fattore comune, si possono (43) dividere per il medesimo i due membri dell' equazione

$$ax+by=K.$$

Supponiamo dunque che i tre numeri a, b e K siano primi tra loro.

241. Teorema 1°. *Se* a *e* b *hanno un divisore comune* ρ *differente dall' unità, l' equazione* $ax+by=K$ *non può avere soluzioni intere.*

Infatti, qualunque sieno i valori interi sostituiti ad x e ad y, il numero $ax+by$ sarà divisibile per ρ; dunque non potrà mai essere eguale a K, che, per ipotesi, non è divisibile per ρ.

242. **Teorema 2°.** *Se* a *e* b *sono primi tra loro, l' equazione* $ax+by=K$ *ha una soluzione intera.*

Si può sempre supporre che il coefficiente di un'incognita, per esempio di x, sia positivo; perchè se non fosse diverrebbe, cangiando i segni a tutti i termini dell'equazione. Posto ciò, se risolviamo l'equazione rispetto ad x, si ricava

$$x=\frac{K-by}{a},$$

e dando successivamente ad y gli a valori,

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots.\ a-1,$$

vi sarà un valore intero tra quelli che si ottengono per x, e ve ne sarà un solo.

Infatti, dividiamo per a gli a valori di $K-by$, facendo le divisioni in modo che tutti i resti siano positivi; è facile a vedersi che questi resti saranno tutti differenti. Poichè, sieno y' e y'' due dei numeri 0, 1, 2, ... $a-1$, e supponiamo che i resti delle divisioni per a di $K-by'$ e di $K-by''$ sieno eguali, che si abbia, per esempio,

$$K-by'=aq+r,\quad K-by''=aq'+r;$$

sottraendo, otterremo

$$b(y''-y')=a(q-q'),$$

e quindi $b(y''-y')$ divisibile per a; ora questo è impossibile; perchè a è primo con b, e non può dividere $y''-y'$ che è minore di a. Dunque gli a resti che si ot-

tengono, dividendo per a gli a valori di $K-by$ sono tutti differenti; ma sono anche tutti minori di a; dunque uno di essi è nullo. Sia β il valore di y che corrisponde al resto 0; avremo

$$x=\frac{K-b\beta}{a}= \text{un numero intero } \alpha;$$

e quindi l'equazione proposta ha la soluzione

$$x=\alpha,\quad y=\beta.$$

243. Teorema 3°. *Quando l'equazione* $ax+by=K$ *ha una soluzione intera, ne ha un numero infinito.*

Sia $x=\alpha$, $y=\beta$ una soluzione intera dell'equazione

$$(1) \qquad ax+by=K,$$

abbiamo l'identità

$$a\alpha+b\beta=K,$$

e quindi l'equazione (1) può scriversi:

$$ax+by=a\alpha+b\beta,$$

ossia

$$a(x-\alpha)=-b(y-\beta),$$

$$(2) \qquad x-\alpha=\frac{-b(y-\beta)}{a}.$$

Affinchè un determinato valore di y possa con un dato valore di x constituire una soluzione intera di questa equazione, è necessario e sufficiente che il valore di y sia tale che $\frac{-b(y-\beta)}{a}$ sia un numero intero, ossia che $y-\beta$ sia divisibile per a, perchè, per ipotesi, a e b sono primi tra loro. Indicando dunque con θ un numero intero, avremo

$$(3) \qquad y-\beta=a\theta,$$

e l'equazione (2), sostituendovi questo valore d' $y-\beta$, dà

(4) $$x-\alpha=-b\theta;$$

e, qualunque sia il valore intero positivo, nullo o negativo che si prenda per θ, i valori di x e di y ricavati dalle equazioni (3) e (4), cioè

(5) $$y=\beta+a\theta, \quad x=\alpha-b\theta,$$

sodisfaranno all'equazione (1).

244. Osservazione. Confrontando le diverse soluzioni dell'equazione proposta, si scorge che i valori di x e di y formano due progressioni aritmetiche illimitate nei due sensi, e che hanno per ragioni i coefficienti di y e di x, uno di questi però cangiato di segno. I valori di y sono

$$\ldots.\beta-2a,\ \ \beta-a,\ \ \beta,\ \ \beta+a,\ \ \beta+2a,\ldots.$$

e quelli di x

$$\ldots.\alpha+2b,\ \ \alpha+b,\ \ \alpha,\ \ \alpha-b,\ \ \alpha-2b,\ldots.$$

Metodi per trovare le soluzioni intere dell'equazione $ax+by=K$.

245. Dal teorema 3° risulta che basta conoscere soltanto una soluzione (α, β) dell'equazione $ax+by=K$; perchè tutte le altre saranno date dalle formole

$$x=\alpha-b\theta, \quad y=\beta+a\theta.$$

Indicheremo diversi metodi coi quali può ottenersi una prima soluzione.

1° Metodo. Quando il coefficiente di una delle incognite x e y è un numero non molto grande, per avere una soluzione della proposta ci possiamo valere dell'osservazione che ha servito (teorema 2°) a dimostrare

l'esistenza di questa soluzione. Sia, per esempio, l'equazione

$$7x-13y=152.$$

Risolvendola rapporto a x, che ha il coefficiente minore, abbiamo

$$x=\frac{152+13y}{7},$$

e possiamo esser certi che dando a y i 7 valori 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, uno dei valori corrispondenti di x sarà intero. Così debbono farsi soltanto sei prove al più. Si trova, per $y=5$,

$$x=\frac{152+65}{7}=\frac{217}{7}=31;$$

dunque l'equazione ammette la soluzione $x=31$, $y=5$, e tutte le soluzioni intere sono date dalle formule

$$x=31+13\theta,\quad y=5+7\theta,$$

dove θ indica un numero indeterminato positivo, nullo o negativo.

Questo metodo è impraticabile quando i coefficienti della equazione proposta non sono numeri piccoli, e bisogna allora ricorrere a uno dei seguenti.

246. 2° Metodo. Si ottiene immediatamente una soluzione della equazione $ax+by=K$, se un coefficiente, per esempio b, è eguale ad 1. Infatti, allora si può prendere $x=0$ ed $y=K$. A questo caso particolare ridurremo il caso generale.

Per fissare le idee, supporremo che il coefficiente di x sia il minore dei due in valore assoluto, e rappresenteremo sempre l'equazione con

$$(1)\qquad ax+by=K.$$

Si ricava

$$x = \frac{K - by}{a}. \tag{2}$$

Effettuiamo le divisioni di K e di b per a, prendendo i quozienti per eccesso o per difetto, in modo da avere resti positivi o negativi, ma minori in valore assoluto di $\frac{1}{2}a$. Sia, per esempio,

$$K = aQ \pm K', \quad b = aq \pm b';$$

la equazione (2) diverrà

$$x = Q - qy + \frac{\pm K' \pm b'y}{a}, \tag{3}$$

ed è evidente che per avere una soluzione della equazione (3), basta averne una della equazione

$$\frac{\pm K' \pm b'y}{a} = t,$$

ossia di

$$at \mp b'y = \pm K', \tag{4}$$

nella quale t indica una nuova incognita intera. Se la (4) avesse la soluzione $y = \beta$, $t = \gamma$, avremmo una soluzione della proposta, prendendo

$$x = Q - q\beta + \gamma,$$
$$y = \beta.$$

I coefficienti della equazione (4) sono: 1° il coefficiente minore della (1); 2° il resto della divisione del maggior coefficiente per il minore; quindi è evidente, che operando sopra l'equazione (4) come abbiamo fatto sulla proposta, e continuando poi ad applicare lo stesso metodo, si formerà una serie di equazioni tali che, conoscendo una soluzione intera di una qualunque di esse, si potrà dedurne una soluzione intera di ciascuna delle precedenti, e i coef-

ficienti di queste diverse equazioni saranno eguali in valore assoluto a due resti consecutivi ottenuti nella ricerca del massimo comune divisore dei numeri a e b; e poichè a e b sono primi tra loro, l'ultimo resto sarà l'unità, e l'ultima delle equazioni ausiliarie che consideriamo avrà la forma

$$fu+v=h,$$

ed ammetterà la soluzione intera, $u=o$, $v=h$, dalla quale dedurremo una soluzione intera della proposta.

247*. **Osservazione.** Se in una equazione

$$ax+by=K$$

il coefficiente di un'incognita, per esempio di x, ha un fattore f comune col termine cognito K, i valori dell'altra incognita dovranno essere divisibili per f; onde si potrà porre $y=fy'$ e poi dividere tutta l'equazione per f, e quindi resterà da risolversi un'equazione con i coefficienti più piccoli, e che richiederà un minor numero di operazioni.

Applichiamo questo metodo a un esempio. Si vogliano determinare le soluzioni intere dell'equazione

(1) $$72x-113y=1000;$$
si trae
$$x=\frac{1000+113y}{72}=14+2y-\frac{8+31y}{72},$$
cioè
(2) $$x=14+2y-t,$$
ponendo
$$\frac{8+31y}{72}=t,$$
ossia
(3) $$31y-72t=-8.$$

Poichè il coefficiente di t e il termine cognito hanno il fattore comune 8, porremo

$$y = 8t', \tag{4}$$

divideremo per 8 l' equazione, ed avremo

$$31t' - 9t = -1. \tag{5}$$

Dalla equazione (5) si ricava

$$t = \frac{31t'+1}{9} = 3t' + \frac{4t'+1}{9},$$

ossia

$$t = 3t' + t''. \tag{6}$$

ponendo

$$\frac{4t'+1}{9} = t'',$$

cioè

$$4t' - 9t'' = -1. \tag{7}$$

Da questa equazione (7) si trae

$$t' = \frac{9t''-1}{4} = 2t'' + \frac{t''-1}{4},$$

ovvero

$$t' = 2t'' + t''', \tag{8}$$

ponendo

$$\frac{t''-1}{4} = t''',$$

cioè

$$t'' - 4t''' = 1. \tag{9}$$

Ecco l' equazione ausiliaria in cui un coefficiente è eguale ad 1, e a cui si sodisfa ponendo

$$t''' = o, \quad t'' = 1.$$

Ora, con sostituzioni successive, le equazioni (8), (6),

(4), (2) danno

$$t'=2, \quad t=7, \quad y=16, \quad x=39;$$

e le soluzioni della proposta sono date tutte dalle formule

$$x=39+113\theta,$$
$$y=16+72\theta,$$

dove θ è un numero intero e arbitrario.

248. 3° Metodo. Posta l'equazione data sotto la forma

$$a(\pm x)-b(\pm y)=K,$$

dove a e b sono positivi, svolgiamo in frazione continua la frazione irriduttibile $\frac{a}{b}$, e sia $\frac{a_0}{b_0}$ la penultima ridotta, cioè quella che precede $\frac{a}{b}$; avremo (231)

$$ab_0-ba_0=\pm 1,$$

e quindi

$$a(\pm Kb_0)-b(\pm Ka_0)=K;$$

dunque si soddisfarà all'equazione proposta, prendendo

$$x=\pm Kb_0, \qquad y=\pm Ka_0.$$

Esempio. *Trovare le soluzioni intere dell'equazione*

$$256x+117y=113.$$

Svolgendo $\frac{256}{117}$ in frazione continua, si trovano i quozienti

$$2,\ 5,\ 3,\ 7,$$

e le ridotte sono

$$\frac{2}{1},\ \frac{11}{5},\ \frac{35}{16},\ \frac{256}{117};$$

e abbiamo

$$256 \,.\, 16 - 35 \,.\, 117 = 1;$$

onde, moltiplicando per 113,

$$256 \,.\, 1808 + 117(-3955) = 113.$$

Dunque una soluzione dell'equazione proposta è:

$$x = 1808, \quad y = -3955.$$

249. Osservazione. La soluzione ottenuta col 3° metodo non è in generale la soluzione *minima*, cioè quella in cui il valore assoluto di una incognita è minore del coefficiente dell'altra, e che si ottiene sempre col primo metodo, e anche col secondo quando è ben diretto. I valori di x e di y dati dal terzo metodo sono multipli del secondo membro dell'equazione proposta; ma se ne può dedurre facilmente la soluzione minima.

Così, nell'esempio precedente, le soluzioni sono date dalle formule

$$x = 1808 - 117\theta,$$
$$y = -3955 + 256\theta.$$

Se vogliamo la soluzione nella quale x è minore di 117 coefficiente di y, basterà prendere θ eguale al quoziente di 1808 diviso per 117, che è 15, e troviamo

$$x = 53, \quad y = -115.$$

Per rappresentare tutte le soluzioni si potranno prendere le formule

$$x = 53 - 117\theta$$
$$y = -115 + 256\theta.$$

Risoluzione dell' equazione $ax+by=K$ in numeri interi e positivi.

250. Abbiamo veduto che se a e b sono primi tra loro, l'equazione $ax+by=K$ ha un numero infinito di soluzioni intere. Tra queste consideriamo ora soltanto le positive. Ponendo in evidenza i segni dei coefficienti, e rammentando che si può sempre supporre positivo il coefficiente di una incognita, l'equazione non può avere altro che una delle forme seguenti:

$$ax+by=K,$$
$$ax-by=K,$$
$$ax+by=-K,$$
$$ax-by=-K.$$

La terza di queste equazioni non può avere, evidentemente, soluzioni positive, e la quarta è compresa nella seconda, perchè per ridurla alla forma di questa, basta cambiare una nell'altra a e b, x e y. Rimangono dunque da esaminarsi i soli due casi

$$ax+by=K, \tag{1}$$
$$ax-by=K. \tag{2}$$

Consideriamo prima l'equazione (2), e sia (α, β) una qualunque delle soluzioni intere della medesima. Tutte le altre saranno date dalle formule

$$x=\alpha+b\theta, \quad y=\beta+a\theta$$

ed è evidente che per avere tutte le soluzioni intere e positive, basta dare a θ tutti i valori interi che sodisfano alle diseguaglianze

$$\alpha+b\theta>o, \quad \beta+a\theta>o,$$

cioè, basta dare a θ valori qualunque maggiori del più

grande dei due numeri $-\frac{\alpha}{b}$ e $-\frac{\beta}{a}$; quindi l' equazione (2) ha un numero infinito di soluzioni intere e positive.

Consideriamo ora l' equazione (1), e sia (α, β) una qualunque delle sue soluzioni; tutte le altre saranno date dalle formule:

$$x=\alpha-b\theta, \quad y=\beta+a\theta.$$

Affinchè x ed y siano positivi è necessario e sufficiente che risultino verificate le disaguaglianze

$$\theta>\frac{-\beta}{a}, \quad \theta<\frac{\alpha}{b},$$

ossia, a cagione della identità $a\alpha+b\beta=K$, la quale dà $\frac{\alpha}{b}=\frac{-\beta}{a}+\frac{K}{ab}$,

$$\theta>\frac{-\beta}{a}, \quad \theta<\frac{-\beta}{a}+\frac{K}{ab}.$$

Dunque il numero delle soluzioni intere e positive sarà eguale al numero degl' interi compresi tra $\frac{-\beta}{a}$ e $\frac{-\beta}{a}+\frac{K}{ab}$, ed è evidente che questo numero è eguale al massimo intero contenuto in $\frac{K}{ab}$, o a questo intero aumentato di 1.

251*. *Se rappresentiamo con* q *il quoziente e con* R *il resto della divisione di* K *per* ab, *il numero delle soluzioni intere e positive dell' equazione*

$$(1) \qquad ax+by=K=qab+R$$

sarà eguale a q *o a* q+1, *secondo che sarà impossibile*

o possibile in numeri interi e positivi l'equazione

$$(2) \qquad ax+by=R.$$

Infatti, sia (α, β) una soluzione intera della equazione (2); una soluzione intera della equazione (1) sarà

$$(3) \qquad x=mb+\alpha, \qquad y=na+\beta,$$

dove m e n sono due numeri qualunque interi e positivi che rendono

$$(4) \qquad m+n=q;$$

come è facile a verificarsi, sostituendo i valori (3) nella equazione (1), ed osservando che $a\alpha+b\beta=R$. Quindi il numero delle soluzioni intere e positive della equazione (1) sarà (250) eguale al numero degl'interi compresi tra

$$\frac{-na-\beta}{a} \text{ e } \frac{-na-\beta}{a}+\frac{qab+R}{ab},$$

ossia tra

$$\frac{-\beta}{a}-n \quad \text{e} \quad \frac{-\beta}{a}+\frac{R}{ab}+q-n,$$

cioè tra

$$\frac{-\beta}{a} \quad \text{e} \quad \frac{-\beta}{a}+\frac{R}{ab}+q,$$

ed è evidente che tra questi due numeri saranno compresi q o $q+1$ interi, secondo che non n'è compreso alcuno o uno solo tra $\frac{-\beta}{a}$ e $\frac{-\beta}{a}+\frac{R}{ab}$, cioè (250) secondo che è impossibile o possibile in numeri interi e positivi la equazione $ax+by=R$.

252*. Per ottenere direttamente tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione

$$(1) \qquad ax+by=K,$$

si potrà usare il metodo che passiamo ad esporre (*).

Poichè x ed y devono essere numeri positivi, si dovrà avere $ax < K$, $by < K$; onde, se rappresentiamo con $E\left(\frac{K}{a}\right)$ e con $E\left(\frac{K}{b}\right)$ i massimi numeri interi contenuti in $\frac{K}{a}$ ed in $\frac{K}{b}$, e poniamo

$$(2) \qquad x = E\left(\frac{K}{a}\right) - x', \qquad y = E\left(\frac{K}{b}\right) - y',$$

x' ed y' dovranno essere positivi, e per avere tutti i valori interi e positivi di x e di y, basterà determinare tutti quelli di x' e di y' che sodisfano all'equazione che si ottiene sostituendo i valori (2) nella equazione (1), cioè ad

$$(3) \qquad aE\left(\frac{K}{a}\right) - ax' + bE\left(\frac{K}{b}\right) - by' = K.$$

Ora, se r' è il resto della divisione di K per a, ed r_1 quello della divisione di K per b, avremo

$$(4) \qquad aE\left(\frac{K}{a}\right) = K - r', \qquad bE\left(\frac{K}{b}\right) = K - r_1.$$

Sostituendo questi valori (4) nell'equazione (3), avremo

$$(5) \qquad ax' + by' = K - r' - r_1 = K'.$$

La risoluzione in numeri interi e positivi dell'equazione (1) dipende dunque da quella di un'altra (5) che ha i medesimi coefficienti per le incognite, e che ha il termine cognito eguale al termine cognito della (1) diminuito dei resti delle divisioni di K per a e per b.

Operiamo ora per la (5) come abbiamo fatto per

(*) Questo metodo è dovuto al ch. signor *Hermite*.

la (1), cioè poniamo

$$(6) \qquad x' = E\left(\frac{K'}{a}\right) - x'', \qquad y' = E\left(\frac{K'}{b}\right) - y'',$$

e indichiamo con r'' e r_1 i resti delle divisioni di K' per a e per b; per ottenere tutti i valori interi e positivi di x' e di y' che sodisfanno all' equazione (5), basterà determinare tutte le soluzioni intere e positive di

$$(7) \qquad ax'' + by'' = K' - r'' - r_1 = K''.$$

Seguitando nello stesso modo, troveremo una serie di equazioni ausiliarie, nelle quali il secondo membro va continuamente diminuendo finchè non si giunge ad una, per la quale i due resti sono nulli, cioè che ha il secondo membro multiplo di a e di b, e quindi di ab, perchè a e b sono primi tra loro. Allora proseguendo, il secondo membro rimarrebbe sempre lo stesso, e tutte le equazioni ausiliarie che si otterrebbero sarebbero identiche, onde siamo costretti ad arrestarci. Questa equazione ausiliaria, a cui dobbiamo arrestarci, sia l' i^{esima}, avremo

$$(8) \qquad ax^{(i)} + by^{(i)} = Qab.$$

Essa avrà $Q+1$ soluzioni intere e positive, perchè (251') l' equazione $ax+by=0$ ammette la soluzione $x=0$, $y=0$; e queste, com' è facile a verificarsi, saranno date dalle formule

$$(9) \qquad x^{(i)} = mb, \qquad y^{(i)} = na,$$

dove per m e n si prendono i $Q+1$ sistemi di numeri interi e positivi che rendono

$$m + n = Q.$$

Quindi dalle formule (2), (6)....(9), con sostituzioni successive, si otterrà

$$(10)\quad \begin{cases} x=E\left(\frac{K}{a}\right)-E\left(\frac{K'}{a}\right)+E\left(\frac{K''}{a}\right)-\ldots\pm mb, \\ y=E\left(\frac{K}{b}\right)-E\left(\frac{K'}{b}\right)+E\left(\frac{K''}{b}\right)-\ldots\pm na. \end{cases}$$

253*. Osservazione I. Se l'equazione proposta è possibile in numeri interi e positivi arriveremo sempre ad un'equazione col secondo membro multiplo di ab, perchè altrimenti, i secondi membri delle equazioni ausiliarie andrebbero diminuendo indefinitamente e si arriverebbe ad una che avrebbe il secondo membro negativo, e sarebbe impossibile in numeri interi e positivi, onde ne deriverebbe una eguale impossibilità per l'equazione proposta.

254*. Osservazione II. Poichè le formule (10) del n° 252* danno $Q+1$ soluzioni, e queste devono essere tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione (1), cioè (251*) q o $q+1$; Q sarà eguale a $q-1$ o a q.

255*. Osservazione III. Si potranno trovare molto semplicemente tutte le soluzioni positive e intere dell'equazione proposta, quando si veda immediatamente la soluzione dell'equazione

$$(1)\qquad ax+by=R,$$

o dell'equazione

$$(2)\qquad ax+by=ab+R,$$

quando la (1) è impossibile in numeri interi o positivi.

Infatti, se (α,β) è una soluzione della (1) ed $m+n=q$, oppure se è soluzione della (2) e $m+n=q-1$, le formule

$$x=\alpha+mb,$$
$$y=\beta+na,$$

daranno tutte le soluzioni di

$$ax+by=qab+R,$$

come è facile a verificarsi.

ESEMPIO. Sia da risolversi in numeri interi e positivi l'equazione

$$2x+3y=25,$$

la quale ha 4 soluzioni, perchè $\frac{25}{6}$ ha per quoziente 4 e per resto 1, e l'equazione $2x+3y=1$ è impossibile in numeri interi e positivi.

Pongo

$$x=12-x', \qquad y=8-y';$$

i resti r' e r_1 sono 1 e 1, onde avremo

$$2x'+3y'=23:$$

ponendo

$$x'=11-x'', \qquad y'=7-y'',$$

poichè r'' e r_2 sono 1 e 2, si ha

$$2x''+3y''=20.$$

Facendo

$$x''=10-x''' \qquad y''=6-y''',$$

poichè i resti r''' e r_3 sono 0 e 2, si ottiene

$$2x'''+3y'''=18,$$

equazione col secondo membro multiplo di 6, che dà

$$x'''=3m, \qquad y'''=2n,$$

dove

$$m+n=3,$$

e colle sostituzioni successive, finalmente si ottiene

$$x=12-11+10-3m, \quad y=8-7+6-2n.$$

I sistemi di valori di m ed n sono

$$\begin{array}{ll} m=0, & n=3; \\ m=1, & n=2; \\ m=2, & n=1; \\ m=3, & n=0; \end{array}$$

onde

$$x=11,\ y=1;\ x=8,\ y=3;\ x=5,\ y=5;\ x=2,\ y=7.$$

Esempio. Si debba risolvere in numeri interi e positivi

$$7x+11y=95.$$

La soluzione di

$$7x+11y=95-77=18$$

è data da

$$x=1, \qquad y=1,$$

onde tutte le soluzioni (255*) dell' equazione proposta saranno date da

$$x=1+11m, \qquad y=1+7n,$$

dove

$$m+n=1,$$

cioè $m=0$, $n=1$ oppure $m=1$, $n=0$; e quindi avremo le due soluzioni

$$x=12,\ y=1;\ x=1,\ y=8.$$

Applicazione della teoria precedente.

256. *Trovare i valori di* x *che rendono intere le frazioni*

$$\frac{ax+b}{c}, \quad \frac{a'x+b'}{c'}, \quad \frac{a''x+b''}{c''}, \ldots.$$

dove a, b, c, a′, b′, c′... *sono numeri interi.*

Consideriamo la prima frazione. Indicandola con y,

bisogna risolvere in numeri interi l'equazione

$$\frac{ax+b}{c}=y,$$

ossia

$$cy-ax=b.$$

Questa equazione avrà soluzioni intere se a e c sono primi tra loro (242). Se una di queste è (x_0, y_0), e rappresentiamo con x' un numero intero indeterminato, le altre saranno date dalle formule:

$$x=x_0+cx', \qquad y=y_0+ax';$$

quindi la prima frazione proposta sarà intera per $x=x_0+cx'$. Sostituendo questo valore di x nelle altre frazioni, esse divengono

$$\frac{a'cx'+(a'x_0+b')}{c'}, \qquad \frac{a''cx'+(a''x_0+b'')}{c''}, \ldots.$$

e dobbiamo determinare i valori interi di x', che le rendono intere.

Questo problema è eguale al proposto; soltanto il numero delle frazioni è minore d'un'unità. Continuando ad applicare lo stesso metodo, si arriverà finalmente ad avere una sola frazione, per la quale si opererà come abbiamo detto in principio.

Esempio. *Trovare un numero che diviso per* 5, 7, 11, *dia per resti rispettivamente* 3, 5, 8.

Rappresentando con x questo numero, le espressioni frazionarie

$$(1) \qquad \frac{x-3}{5}, \qquad \frac{x-5}{7}, \qquad \frac{x-8}{11}$$

saranno numeri interi. Affinchè la prima frazione equivalga a un intero, bisogna che sia

$$\frac{x-3}{5}=x', \qquad x=5x'+3,$$

rappresentando con x' un numero intero. Le altre due divengono

$$(2)\qquad \frac{5x'-2}{7},\quad \frac{5x'-5}{11}.$$

Affinchè $\frac{5x'-5}{11}=\frac{5(x'-1)}{11}$ sia un intero, bisogna che 11 divida $x'-1$, perchè è primo con 5; dunque, rappresentando con x'' un numero intero indeterminato, dovrà essere

$$x'-1=11x'' \quad \text{ossia} \quad x'=11x''+1.$$

Con questo la prima delle frazioni (2) diviene

$$\frac{55x''+3}{7}=8x''-\frac{x''-3}{7},$$

e la condizione perchè questa frazione sia intera è che $x''-3$ sia divisibile per 7. Si può dunque porre, indicando con θ un numero intero indeterminato,

$$x''=7\theta+3,$$

e colla sostituzione di questo valore, x' e x divengono

$$x'=77\theta+34,$$
$$x=385\theta+173.$$

Questa ultima formula risolve il problema. Il più piccolo numero che sodisfa alla questione è 173.

Risoluzione in numeri interi di una equazione con un numero qualunque d'incognite.

257. Consideriamo prima un'equazione a tre incognite, x, y e z,

$$ax+by+cz=K,$$

dove a, b, c, K sono numeri interi positivi o negativi.

Se a, b, c e K avessero un fattore comune, si dividerebbe tutta l' equazione per questo fattore; quindi potremo supporre che siano primi tra loro.

Affinchè l' equazione proposta abbia soluzioni intere è necessario che a, b e c siano primi tra loro; perchè se a, b, c avessero un fattore comune ρ, il primo e non il secondo membro dell' equazione sarebbe divisibile per ρ. Questa condizione è sufficiente. Infatti se tra i numeri a, b, c ve ne sono due, per esempio a e b, primi tra loro, dando a z un valore qualunque intero γ, si potranno sempre trovare (242) valori interi di x e di y, che sodisfino all' equazione

$$ax+by=K-c\gamma;$$

quindi la proposta ha un numero infinito di soluzioni intere per ogni valore intero dato a z.

Se due qualunque dei numeri a, b, c, per esempio a e b, non sono primi tra loro, sia ρ il loro massimo comun divisore, e poniamo $a=\rho a'$, $b=\rho b'$; la proposta diviene

$$a'x+b'y=\frac{K-cz}{\rho}.$$

Poichè ρ e c sono primi tra loro si potrà trovare (256) un numero infinito di valori di z che rendano $\frac{K-cz}{\rho}=K'$ numero intero. Allora la proposta diviene

$$a'x+b'y=K',$$

ed è evidente che avrà un numero infinito di soluzioni intere.

Quanto abbiamo detto dà il modo di trovare una soluzione della proposta.

ESEMPIO. *Trovare una soluzione intera dell' equazione*

$$4x-18y+27z=100.$$

L'equazione può scriversi

$$2x-9y=\frac{100-27z}{2}.$$

Il secondo membro diviene eguale a 23 per $z=2$, e abbiamo

$$2x-9y=23,$$

che ha la soluzione intera $y=1$, $x=16$. La proposta ha dunque la soluzione intera $x=16$, $y=1$, $z=2$.

258. Ora mostreremo come, mediante una soluzione, possano determinarsi tutte le altre.

Sia $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$, una soluzione intera dell' equazione

$$(1)\qquad ax+by+cz=K,$$

in modo che si abbia identicamente

$$(2)\qquad a\alpha+b\beta+c\gamma=K.$$

Sia θ un numero intero indeterminato, è evidente che si sodisfarà alla proposta ponendo

$$(3)\qquad \begin{cases} x=\alpha+b\theta, \\ y=\beta-a\theta, \\ z=\gamma, \end{cases}$$

perchè, portando questi valori nella proposta, i termini con θ spariscono e il risultato della sostituzione è l'identità (2). Così dalla soluzione (α, β, γ) deduciamo la soluzione molto più generale (3). Nondimeno le formule (3) non danno tutte le soluzioni della proposta, perchè abbiamo veduto che vi è un numero infinito di valori di z che possono far parte di un sistema di soluzioni.

Ma dal sistema (3) se ne può dedurre uno più generale, aggiungendo ai valori di x e di z i due termini $c\varphi$ e $-a\varphi$, dove φ indica un numero intero indetermina-

to; si ottiene allora

$$(4)\quad \begin{cases} x=\alpha+b\theta+c\varphi, \\ y=\beta-a\theta, \\ z=\gamma-a\varphi: \end{cases}$$

queste formule (4) danno tutte le soluzioni della proposta, se non escludiamo i valori frazionari per θ e per φ; ma se non ammettiamo altro che valori interi per queste due indeterminate, le formule (4) daranno soltanto una parte delle soluzioni.

Dal sistema (4) se ne deduce uno più generale, aggiungendo ai valori di y e di z i due termini $c\psi$ e $-b\psi$, ove ψ indica un intero indeterminato. Abbiamo così

$$(5)\quad \begin{cases} x=\alpha+b\theta+c\varphi, \\ y=\beta-a\theta+c\psi, \\ z=\gamma-a\varphi-b\psi, \end{cases}$$

e queste formule (5) daranno tutte le soluzioni intere dell'equazione proposta, se attribuiamo alle indeterminate θ, φ, ψ tutti i valori interi positivi o negativi.

Per dimostrarlo, supponiamo che la proposta ammetta la soluzione $(\alpha', \beta', \gamma')$, io dico che potremo trovare tali valori di θ, φ e ψ, per i quali si abbia

$$\alpha'=\alpha+b\theta+c\varphi,$$
$$\beta'=\beta-a\theta+c\psi,$$
$$\gamma'=\gamma-a\varphi-b\psi,$$

ossia

$$(6)\quad \begin{cases} b\theta+c\varphi=\alpha'-\alpha, \\ -a\theta+c\psi=\beta'-\beta, \\ -a\varphi-b\psi=\gamma'-\gamma. \end{cases}$$

Primieramente una di queste equazioni è conseguenza delle altre due. Infatti, sommandole dopo averle

moltiplicate rispettivamente per a, b, c, si ottiene

$$0=a(\alpha'-\alpha)+b(\beta'-\beta)+c(\gamma'-\gamma), \tag{7}$$

che è una identità, perchè

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=K, \qquad a\alpha'+b\beta'+c\gamma'=K;$$

dunque basta considerare le due prime equazioni (6), cioè

$$\left\{\begin{aligned} b\theta+c\varphi&=\alpha'-\alpha,\\ -a\theta+c\psi&=\beta'-\beta.\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Ambedue queste equazioni (8), considerate separatamente, ammettono soluzioni intere, perchè in conseguenza della identità (7), il massimo comun divisore di b e di c divide $\alpha'-\alpha$, e quello di a e di c divide $\beta'-\beta$, perchè a, b e c sono primi tra loro.

Sia (θ_0, φ_0) una soluzione della prima equazione (8) e ρ il massimo comune divisore di b e di c; sia anche (θ_1, ψ_1) una soluzione della seconda equazione (8) e ρ' il massimo comune divisore di a e di c; le soluzioni delle (8) considerate separatamente, saranno date rispettivamente dalle formole

$$\theta=\theta_0+\frac{c}{\rho}t, \qquad \varphi=\varphi_0-\frac{b}{\rho}t; \tag{9}$$

$$\theta=\theta_1+\frac{c}{\rho'}t', \quad \psi=\psi_1+\frac{a}{\rho'}t', \tag{10}$$

rappresentando con t e t' due numeri interi indeterminati. Per provare che il sistema delle equazioni (8) ammette soluzioni intere, basterà dunque mostrare che esistono valori interi di t e di t' che rendono eguali i valori di θ dati dalle equazioni (9) e (10), cioè che danno

$$\theta_0+\frac{c}{\rho}t=\theta_1+\frac{c}{\rho'}t',$$

ossia

$$\frac{c}{\rho'}t' - \frac{c}{\rho}t = \theta_0 - \theta_1. \tag{11}$$

Ora abbiamo per ipotesi

$$b\theta_0 + c\varphi_0 = \alpha' - \alpha,$$
$$-a\theta_1 + c\psi_1 = \beta' - \beta;$$

e queste equazioni, moltiplicate rispettivamente per a e per b e sommate, danno

$$ab(\theta_0 - \theta_1) + c(a\varphi_0 + b\psi_1) = a(\alpha' - \alpha) + b(\beta' - \beta),$$

dalla quale, a cagione dell'identità (7), si deduce

$$ab(\theta_0 - \theta_1) + c(a\varphi_0 + b\psi_1) = -c(\gamma' - \gamma),$$

ossia

$$\frac{ab}{\rho'\rho}(\theta_0 - \theta_1) + \frac{c}{\rho'\rho}(a\varphi_0 + b\psi_1 + \gamma' - \gamma) = o;$$

onde $\frac{c}{\rho'\rho}$, numero intero primo con $\frac{a}{\rho'}$ e $\frac{b}{\rho}$, dovrà dividere $\theta_0 - \theta_1$, e quindi

$$\theta_0 - \theta_1 = \frac{ic}{\rho'\rho},$$

rappresentando con i un numero intero.

Con questo la (11) diviene

$$\frac{c}{\rho'}t' - \frac{c}{\rho}t = \frac{ci}{\rho\rho'},$$

ossia

$$\rho t' - \rho' t = i,$$

la quale si può risolvere in numeri interi, perchè ρ e ρ' sono primi tra loro.

259. In generale, un'equazione con μ incognite,

$$ax+by+cz+\ldots\ldots+du=K,$$

dove $a, b, c, \ldots\ldots d, K$ sono primi tra loro, non potrà avere soluzioni intere altro che se anche $a, b, c, \ldots\ldots d$ saranno primi tra loro. Proponiamoci di trovare anche in questo caso una soluzione. Sia ρ il massimo comune divisore di a e di b, avremo

$$\frac{a}{\rho}x+\frac{b}{\rho}y=\frac{K-cz-\ldots\ldots-du}{\rho};$$

determiniamo una soluzione intera dell'equazione

$$\frac{K-cz-\ldots\ldots-du}{\rho}=\xi,$$

che ha soltanto $\mu-1$ incognite, e prendendo poi una soluzione di $\frac{a}{\rho}x+\frac{b}{\rho}y=\xi$, avremo una soluzione dell'equazione proposta.

Risoluzione in numeri interi di m equazioni con $m+1$ incognite.

260. Cominciamo da considerare il caso di due equazioni con tre incognite

(1) $$ax+by+cz=K,$$
(2) $$a'x+b'y+c'z=K';$$

dove a, b, c, K sono numeri interi primi tra loro, ed egualmente a', b', c', K'.

Affinchè il problema sia possibile, bisogna che ogni equazione, considerata isolatamente, abbia soluzioni intere, e quindi che tanto $a, b, c,$ quanto $a', b', c',$ siano primi tra loro.

Eliminando una incognita, per esempio z, si ha

$$(ac'-a'c)x+(bc'-cb')y=Kc'-cK', \tag{3}$$

e si può sostituire al sistema dell'equazioni (1) e (2) quello dell'equazioni (1) e (3); se la (3) ha soluzioni intere, queste saranno della forma

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{bc'-cb'}{\rho}\theta, \\ y &= y_0 - \frac{ac'-ca'}{\rho}\theta, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

indicando θ un numero intero indeterminato, ρ il massimo comune divisore tra $bc'-b'c$, $ac'-a'c$, $Kc'-K'c$ e (x_0, y_0) una soluzione intera dell'equazione (3). Sostituendo i valori (4) di x e di y nella (1), avremo una equazione a due incognite z e θ; se questa avrà soluzioni intere, otterremo z e θ espresse per mezzo di una nuova indeterminata θ', e quindi si avranno tutte quante le soluzioni intere della proposta espresse per una sola indeterminata θ'.

Osservazione. Se c e c' sono primi tra loro, l'unica condizione di possibilità del problema è che l'equazione (3) ammetta soluzioni intere.

Infatti, l'equazione (3) può porsi sotto la forma

$$\frac{ax+by-K}{a'x+b'y-K'}=\frac{c}{c'};$$

ora, per ipotesi, essa ammette soluzioni intere, e $\frac{c}{c'}$ è irriducibile; dunque, essendo $(x_0\ y_0)$ una soluzione intera, per un teorema di aritmetica (*), si ha

$$ax_0+by_0-K=cz_0,$$
$$a'x_0+b'y_0-K'=c'z_0.$$

(*) Vedi *Aritmetica di Bertrand*, n° 160.

dove z_0 è un numero intero. Quindi le equazioni (1) e (2) ammettono una soluzione intera $(x_0, y_0, -z_0)$.

261. Se vogliamo soltanto le soluzioni positive dell' equazioni proposte, poichè le tre incognite x, y, z sono espresse per un solo numero intero indeterminato, prenderemo per θ soltanto i valori che sodisfanno alle diseguaglianze

$$x > o, \quad y > o, \quad z > o.$$

262. Esempio. *30 persone hanno speso 30 lire in comune; la spesa di un uomo è di 5 lire, quella di una donna di 1 lira, quella di un bambino $\frac{1}{4}$ di lira; quanti uomini, donne e bambini vi erano?*

Rappresentando con x il numero degli uomini, con y quello delle donne, con z quello dei bambini, le equazioni del problema sono

$$(1) \qquad \begin{aligned} x+y+z &= 30, \\ 5x+y+\tfrac{1}{4}z &= 30; \end{aligned}$$

sottraendo la prima dalla seconda, si ottiene

$$(2) \qquad 4x-\tfrac{3}{4}z = o,$$

ossia

$$\frac{x}{z} = \frac{3}{16}.$$

La frazione $\frac{3}{16}$ è irriducibile, dunque, indicando con θ un numero intero qualunque, avremo

$$\begin{aligned} x &= 3\theta, \\ z &= 16\theta; \end{aligned}$$

queste formule danno le soluzioni della (2); la prima dell' equazioni (1) dà allora

$$19\theta+y = 30;$$

onde

$$y = 30 - 19\theta.$$

Affinchè i valori di x, y, z siano positivi, bisogna che sia

$$\theta > 0, \quad \text{e} \quad \theta < \frac{30}{19};$$

quindi $\theta = 1$, e $x = 3$, $y = 11$, $z = 16$.

Vi erano 3 uomini, 11 donne e 16 bambini.

263. Consideriamo ora un sistema di m equazioni tra $m+1$ incognite; sostituiremo al sistema proposto un sistema equivalente di m equazioni, la prima delle quali $A_1 = 0$ contenga due sole incognite x e y, la seconda $A_2 = 0$ oltre queste due un' altra sola incognita z, e così di seguito.

Se l' equazione $A_1 = 0$ ha soluzioni intere, si esprimeranno x e y per mezzo di una indeterminata θ, e sostituendo i loro valori in $A_2 = 0$, questa equazione conterrà due sole incognite z e θ; se ha soluzioni intere, si esprimeranno z e θ per mezzo di una nuova indeterminata θ'; allora x, y e z saranno espresse per θ', e portati i loro valori in $A_3 = 0$, questa conterrà due sole incognite, e continueremo in questo modo, se è possibile, finchè non siano espresse tutte le incognite per mezzo di una sola e medesima indeterminata.

Non considereremo qui il caso generale di m equazioni tra $m+n$ incognite.

Esercizi.

1°. Se $a, b, c, \ldots . l$ sono numeri primi tra loro due a due, α un numero inferiore ad a e primo con a, β un numero inferiore a b e primo con $b, \ldots . \lambda$ un numero inferiore ad l e primo con l; non esiste altro che un sol numero $z < abc \ldots . l$

che diviso per a dia per resto α, diviso per b dia per resto $\beta, \ldots,$ diviso per l dia per resto λ.

2°. Dimostrare, valendosi del teorema precedente, che indicando con E_a il numero degl' interi inferiori ad a e primi con a, se $a, b, c \ldots . l$ sono primi tra loro, si ha l'eguaglianza

$$E_{abc\ldots l} = E_a \, E_b \, E_c \, \ldots . E_l \, .$$

3°. Dimostrare che se

$$N = a^{\alpha} \, b^{\beta} \, c^{\gamma} \ldots . l^{\lambda},$$

e $a, b, c, \ldots . l$, numeri primi differenti, sarà

$$E_N = N\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) \ldots . \left(1 - \frac{1}{l}\right).$$

4°.* Dimostrare che se $(\alpha, \beta, \gamma \ldots . \delta, \varepsilon)$ è una soluzione intera dell' equazione con n incognite,

$$ax + by + cz + \ldots . + du + ev = K,$$

tutte le altre in numero infinito saranno date dalle formule

$$\begin{aligned}
x &= \alpha + b\theta_1 + c\theta_2 + \ldots\ldots\ldots + d\theta_{n-2} + e\theta_{n-1}, \\
y &= \beta - a\theta_1 + c\theta'_1 + \ldots\ldots\ldots + d\theta'_{n-3} + e\theta_{n-2}, \\
z &= \gamma - a\theta_2 - b\theta'_1 + \ldots\ldots\ldots + d\theta''_{n-4} + e\theta''_{n-3}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u &= \delta - a\theta_{n-2} - b\theta'_{n-3} - \ldots\ldots\ldots\ldots + e\theta_1^{(n-2)}, \\
v &= \varepsilon - a\theta_{n-1} - b\theta'_{n-2} - \ldots\ldots\ldots\ldots - d\theta_1^{(n-2)},
\end{aligned}$$

dove $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}, \theta'_1, \theta'_2, \ldots$ sono numeri interi qualunque.

CAPITOLO XXI.

EQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMI.

264. Un'equazione dicesi esponenziale quando l'incognita vi comparisce come esponente. La più semplice di tutte, l'unica di cui ci occuperemo, è l'equazione

$$a^x = b,$$

nella quale x rappresenta l'incognita, ed a e b numeri dati.

Ma prima è necessario di tornare sopra la definizione dell'espressione a^x, e di aggiungervi alcune spiegazioni. Se x è commensurabile, l'espressione a^x è stata definita (35) e non presenta difficoltà. Supponendo $x = \frac{m}{n}$, ed m e n essendo numeri interi, abbiamo

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Supporremo sempre in questo capitolo, che a sia positivo, e non considereremo altro che i valori reali e positivi del radicale; non vi è dunque difficoltà nè ambiguità.

Se x ha un valore commensurabile $-m$, a^x è definito (37) dall'equazione

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Rimane dunque soltanto da definirsi a^x per i valori in-

commensurabili positivi o negativi di x; ma per questo abbiamo bisogno di premettere alcune osservazioni.

265. Osservazione I. Tutte le potenze, positive o negative, d'un numero positivo sono positive. Questo è evidente, poichè noi non consideriamo altro che i valori positivi dei radicali.

266. Osservazione II. Tutte le potenze positive dei numeri maggiori dell'unità sono maggiori dell'unità, e tutte le potenze negative sono minori dell'unità. L'opposto avviene per le potenze dei numeri minori di uno.

Infatti, sieno a un numero >1, e $a^{\frac{m}{n}}$ una potenza positiva di a; abbiamo per definizione

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m};$$

ora, poichè $a>1$, è evidente che anche $a^m>1$ e quindi $\sqrt[n]{a^m}>1$. Poichè le potenze positive di a sono maggiori dell'unità, l'eguaglianza

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$$

dimostra che le potenze negative, che ne sono le inverse, sono minori dell'unità.

Finalmente, supponendo che sia $a<1$, si potrà porre $a=\frac{1}{a'}$, e sarà $a'>1$; quindi avremo

$$a^x=\frac{1}{a'^x},$$

ed è evidente che i valori di x, per i quali è $a'^x>1$, rendono $a^x<1$, e reciprocamente.

267. Osservazione III. Se x acquista valori commensurabili crescenti, l'espressione a^x varia sempre nello stesso senso, aumenta se $a>1$, diminuisce se $a<1$.

Infatti, sieno p e q due valori commensurabili, positivi o negativi, attribuiti successivamente a x, avremo (39)

$$\frac{a^q}{a^p}=a^{q-p};$$

ora $q-p$ è positivo, poichè, per ipotesi, $q>p$. Se dunque $a>1$, anche (266) a^{q-p} sarà >1, e quindi $a^q>a^p$. Se poi $a<1$, anche $a^{q-p}<1$, e quindi $a^q<a^p$. Dunque, nel primo caso, a^x aumenta quando x passa dal valore p al valore q, e nel secondo diminuisce.

268. Osservazione IV. Si possono attribuire ad x valori commensurabili così poco differenti tra loro, che a^x vari tanto poco quanto si vuole.

Sia m un valore commensurabile qualunque di x. Dico che si può aumentare m di una quantità α assai piccola perchè la differenza $a^{m+\alpha}-a^m$ risulti piccola quanto si vuole.

Abbiamo

$$a^{m+\alpha}=a^m\,.\,a^\alpha,$$

e quindi

$$a^{m+\alpha}-a^m=a^m(a^\alpha-1).$$

a^m è indipendente da α; basterà dunque dimostrare che $a^\alpha-1$ può essere reso piccolo quanto si vuole da valori sufficientemente piccoli di α. Supponiamo prima $a>1$. Qualunque sia il valore positivo di α, a^α sarà sempre (266) maggiore dell'unità. Per dimostrare che vi si approssima quanto si vuole, basta far vedere che può divenire minore di un numero qualunque $1+\varepsilon$ maggiore dell'unità, cioè che si può scegliere α in modo che sia

$$a^\alpha<1+\varepsilon,$$

dove ε è tanto piccolo quanto ci pia e. Infatti, poniamo

$\alpha = \frac{1}{k}$, la diseguaglianza precedente diviene

$$a^{\frac{1}{k}} < 1+\varepsilon,$$

ossia

$$(1+\varepsilon)^k > a.$$

Ora, un numero $1+\varepsilon$ maggiore di uno, può sempre essere inalzato a una potenza assai grande perchè il risultato superi un numero dato a; perchè ponendo $1+\varepsilon = h$, abbiamo

$$h-1 = \varepsilon,$$
$$h^2-h = \varepsilon h > \varepsilon,$$
$$h^3-h^2 = \varepsilon h^2 > \varepsilon,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$h^k-h^{k-1} = \varepsilon h^{k-1} > \varepsilon;$$

sommando queste diseguaglianze, e togliendo i termini che si distruggono dal primo membro, si ottiene

$$h^k-1 > k\varepsilon,$$

onde, sostituendo ad h il suo valore $1+\varepsilon$

$$(1+\varepsilon)^k > 1+k\varepsilon,$$

e $k\varepsilon$ potendo divenire, per valori convenienti di k, grande quanto si vuole, e quindi potendo rendere $1+k\varepsilon > a$, la proposizione è dimostrata. Se $a < 1$, si rappresenterà con $\frac{1}{a'}$, e sarà $a' > 1$; onde avremo $a^\alpha = \frac{1}{a'^\alpha}$; ora, poichè per quello che abbiamo dimostrato, a'^α può differire tanto poco quanto si vuole dall' unità, lo stesso avverrà anche di $\frac{1}{a'^\alpha}$ ossia di a^α.

269*. Osservazione V. Una espressione che gode la proprietà di variare di tanto poco quanto si vuole per aumenti sufficientemente piccoli dati a una va-

riabile x che essa contiene, dicesi *funzione continua di* x, ed è chiaro che se, per due valori α e β di x, essa prende due dati valori, potrà anche, per un valore conveniente di x compreso tra α e β, prenderne uno qualunque intermedio. Ammettendo questa definizione potremo dire che a^x è funzione continua di x.

270. Le osservazioni precedenti ci permettono di definire a^x, quando x è incommensurabile. Diremo: a^x rappresenta, per un valore incommensurabile h attribuito ad x, un numero compreso tra i valori di a^x che corrispondono agli esponenti commensurabili minori di h, e quelli che corrispondono agli esponenti maggiori di h. Questa definizione, analoga a quella data in aritmetica (*) per le radici quadrate e cubiche assegna ad a^h un valore unico e determinato.

Infatti, supponendo, per fissar le idee, che i valori di a^x rappresentino lunghezze portate sopra una linea retta partendo da una data origine, l'estremità di quelle che corrispondono ai valori di $x < h$, occuperanno una regione della retta; quelle che corrispondono ai valori di $x > h$ ne occuperanno un'altra; e risulta dalle *osservazioni precedenti* che queste regioni sono intieramente separate (267), e che non può esistere tra loro veruno intervallo di estensione finita (268), ma un semplice punto di divisione. La distanza, a cui si trova questo punto dall'origine, misura a^h.

Risoluzione dell' equazione $a^x = b$.

271. Se a e b sono numeri positivi, l' equazione $a^x = b$ ha sempre una soluzione, e una soltanto. Per dimostrarlo distingueremo due casi.

1°. $a > 1$. Abbiamo veduto (268) che si può sem-

(*) Vedi *Aritmetica di Bertrand*, n. 238 e 269.

pre trovare un valore di x sufficientemente grande perchè a^x superi una grandezza qualunque data; ma, per $x=0$, $a^x=1$, dunque poichè a^x è funzione continua di x, esisterà sempre (269') un valore di x maggiore di zero, per cui a^x prenda un valore qualunque compreso tra 1 e una quantità grande quanto si vuole, ossia, come suol dirsi, compreso tra $+1$ e $+\infty$.

Se diamo ad x valori negativi ponendo, per esempio, $x=-m$, avremo

$$a^x=\frac{1}{a^m},$$

ed m variando da o a $+\infty$ il denominatore del secondo membro prende tutti i valori possibili >1, e quindi la frazione tutti i valori possibili <1.

a^x non può prendere due volte lo stesso valore, perchè se avessimo $a^x=a^{x'}$, se ne dedurrebbe $1=\frac{a^x}{a^{x'}}=a^{x-x'}$, Ora, la potenza 0 di un numero >1 è evidentemente la sola che sia eguale all' unità; quindi dovrebbe essere

$$x=x'.$$

2°. $a<1$. Poniamo $a=\frac{1}{a'}$; sarà $a'>1$, e

$$a^x=\frac{1}{a'^x},$$

e per quello che abbiamo dimostrato mentre x varia da 0 a $+\infty$, a'^x prende tutti i valori possibili maggiori dell' unità, dunque a^x prenderà tutti i valori compresi tra 0 e 1. Variando x da 0 a $-\infty$, a'^x prende tutti i valori possibili minori dell' unità, e quindi a^x prenderà tutti i valori maggiori dell' unità. Dunque anche in questo caso, a^x può prendere un valore positivo qualunque.

272. Dimostrato che l'equazione

$$(1) \qquad a^x = b$$

ha una soluzione, ed una soltanto, determiniamo le frazioni integranti successive della frazione continua che rappresenta questa soluzione. Otterremo così una serie di valori approssimati ad x, e posti (236) sotto la forma più semplice che possano prendere col grado di approssimazione che hanno.

Primieramente supponiamo $a > 1$ e $b > 1$. Diamo ad x i valori successivi 0, 1, 2, 3, 4, ... finchè si trovino due potenze consecutive di a, a^n ed a^{n+1}, che comprendano b, in modo che

$$a^n < b, \quad a^{n+1} > b;$$

x sarà evidentemente compreso tra n ed $n+1$, e potremo porre

$$(2) \qquad x = n + \frac{1}{y},$$

e y sarà determinato dalla equazione

$$a^{n+\frac{1}{y}} = b,$$

ossia

$$a^n . a^{\frac{1}{y}} = b;$$

onde si deduce

$$a^{\frac{1}{y}} = \frac{b}{a^n},$$

$$(3) \qquad a = \left(\frac{b}{a^n}\right)^y;$$

e quindi l'equazione che deve determinare y ha la forma eguale a quella della proposta, e si deduce da quella sostituendo a a b, e $\frac{b}{a^n}$ ad a, ed a e $\frac{b}{a^n}$ sono maggiori di uno.

Diamo a y i valori successivi $1, 2, 3, 4, \ldots$ finchè si trovino due potenze consecutive di $\frac{b}{a^n}$, $\left(\frac{b}{a^n}\right)^m$ e $\left(\frac{b}{a^n}\right)^{m+1}$, che comprendano a tra loro, in modo che

$$\left(\frac{b}{a^n}\right)^m < a, \quad \left(\frac{b}{a^n}\right)^{m+1} > a;$$

y sarà evidentemente compreso tra m e $m+1$, e potremo porre

$$(4) \qquad y = m + \frac{1}{z},$$

e z sarà determinato dalla equazione

$$\left(\frac{b}{a^n}\right)^{m+\frac{1}{z}} = a,$$

che si porrà facilmente sotto la forma

$$(5) \qquad \left(\frac{a}{\left(\frac{b}{a^n}\right)^m}\right)^z = \frac{b}{a^n}.$$

Dunque abbiamo, per determinare z, una nuova equazione esponenziale. Troveremo, per mezzo di sostituzioni successive, la parte intera p di z, porremo

$$(6) \qquad z = p + \frac{1}{u},$$

e formeremo una nuova equazione esponenziale che determinerà u. Le equazioni (2), (4) e (6) daranno evidentemente

$$x = n + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{u}}}.$$

Continuando nello stesso modo, si troveranno tanti quozienti incompleti quanti si vogliono della frazione continua che rappresenta x.

Esempio. Si voglia risolvere

$$2^x = 7.$$

Poichè 7 è compreso tra 2^2 ossia 4, e 2^3 ossia 8, porremo

$$x = 2 + \frac{1}{y};$$

onde si deduce

$$\left(\frac{7}{4}\right)^y = 2.$$

Poichè 2 è compreso tra $\frac{7}{4}$ e $\left(\frac{7}{4}\right)^2$ ossia $\frac{49}{16}$, porremo

$$y = 1 + \frac{1}{z},$$

onde

$$\left(\frac{8}{7}\right)^z = \frac{7}{4}.$$

$\frac{7}{4}$ è compreso tra $\left(\frac{8}{7}\right)^4$ ossia $\frac{4096}{2401}$ e $\left(\frac{8}{7}\right)^5$ ossia $\frac{32768}{16807}$, quindi porremo

$$z = 4 + \frac{1}{u},$$

onde

$$\left(\frac{16807}{16384}\right)^u = \frac{8}{7},$$

e potremo trovare la parte intera di u in modo analogo.

Arrestando l'operazione a questo punto, abbiamo

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{u}}},$$

e per le prime ridotte 2, 3, $\frac{14}{5}$; si può dunque prendere $\frac{14}{5}$ per valore approssimato di x.

273. Se a e b non sono ambedue maggiori di uno, è facile trasformare l'equazione

$$(1) \qquad a^x = b$$

in un'altra che sodisfaccia a questa condizione.

Infatti, siano $a > 1$, $b < 1$; risolveremo l'equazione

$$a^x = \frac{1}{b},$$

e per sodisfare alla (1), basterà prendere, col segno —, il valore positivo trovato per x.

Sieno $a < 1$, $b > 1$; risolveremo

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = b,$$

e il valore di x, preso col segno —, sodisfarà alla (1).

Finalmente, sieno $a < 1$, $b < 1$; risolveremo

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{b},$$

che equivale evidentemente all'equazione (1).

Definizione dei logaritmi.

274. Quando esiste la relazione

$$a^x = b,$$

si dice che x è il *logaritmo* del numero b nel sistema a base a, e si scrive

$$x = \log b.$$

L' insieme dei logaritmi dei differenti numeri, corrispondenti a una stessa base a, forma un *sistema di logaritmi.* I logaritmi di uno stesso sistema godono di proprietà molto importanti, che ora dimostreremo. Supporremo sempre la base positiva.

Proprietà dei logaritmi.

275. *Il logaritmo del prodotto di due numeri è eguale alla somma dei logaritmi di questi numeri.*

Infatti, sieno x e y i logaritmi dei numeri b e c; avremo (274)

$$a^x = b,$$
$$a^y = c;$$

e, moltiplicando queste due equazioni membro a membro,

$$a^{x+y} = bc;$$

dunque $x+y$ è il logaritmo di bc, e abbiamo

$$\log bc = \log b + \log c.$$

276. *Il logaritmo del quoziente di due numeri è eguale alla differenza dei logaritmi di questi numeri.*

Infatti, siano x e y i logaritmi di due numeri b e c,

avremo (274)

$$a^x = b,$$
$$a^y = c,$$

e, dividendo le due equazioni membro a membro,

$$a^{x-y} = \frac{b}{c};$$

dunque $x-y$ è il logaritmo di $\frac{b}{c}$, e si ha

$$\log \frac{b}{c} = \log b - \log c.$$

277. *Il logaritmo della potenza* n^{esima} *d' un numero è eguale, qualunque sia* n (*intero o frazionario, positivo o negativo*), *al prodotto di* n *per il logaritmo di questo numero.*

Sia x il logaritmo di b, sarà

$$a^x = b;$$

onde, inalzando i due membri alla potenza n,

$$a^{nx} = b^n;$$

dunque nx è il logaritmo di b^n, e si ha

$$\log b^n = n \log b.$$

278. *In un sistema qualunque di logaritmi, l'unità ha per logaritmo zero, e la base ha per logaritmo l' unità.*

Infatti, abbiamo, qualunque sia a,

$$a^0 = 1, \quad a^1 = a.$$

279. *Quando la base di un sistema è* > 1, *i numeri maggiori dell' unità hanno i logaritmi positivi, e*

i numeri minori dell' unità hanno i logaritmi negativi. Accade l' opposto se la base è < 1.

Infatti, abbiamo veduto (266) che le potenze positive d' un numero maggiore dell' unità sono maggiori dell' unità, e le potenze negative sono minori dell' unità. Accade l' opposto per le potenze dei numeri minori dell' unità. Dunque se $a > 1$, l' equazione

$$a^x = b$$

richiede che x, ossia $\log b$, sia positivo se $b > 1$, e negativo se $b < 1$.

Se poi $a < 1$, l' equazione

$$a^x = b$$

esige che x, ossia $\log b$, sia negativo se $b > 1$, e positivo se $b < 1$.

OSSERVAZIONE. I numeri negativi non hanno logaritmi, perchè le potenze positive o negative di una base positiva sono tutte positive.

Identità dei logaritmi algebrici e aritmetici.

280. I logaritmi, quali li abbiamo definiti (274), non differiscono da quelli considerati in aritmetica (*), che sono stati derivati dal confronto dei termini di due progressioni.

Infatti, se consideriamo una serie di numeri in progressione per quoziente che cominci dall'unità:

$$\div\!\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots : q^n : q^{n+1},$$

e se chiamiamo x il logaritmo di q, i logaritmi dei differenti termini di questa progressione saranno (277)

$$0,\ x,\ 2x,\ 3x,\ 4x, \ldots, nx,\ (n+1)x,$$

(*) Vedi *Aritmetica di Bertrand*, Cap. XVI.

Se un numero N non può essere inserito nella progressione per quoziente, chiamiamo log. di N un numero maggiore dei logaritmi dei numeri inferiori ad N che possono essere inseriti e ~~maggiore~~ minore

e formeranno una progressione aritmetica che comincia con 0.

281. Ora, se inseriamo un numero k di medi tra i termini consecutivi delle due progressioni, si dice in aritmetica, che i termini così introdotti nella progressione per differenza sono i logaritmi dei termini corrispondenti della progressione per quoziente. Vedremo ora che le conseguenze di questa definizione sono d'accordo con quella che abbiamo data di sopra.

Infatti, se inseriamo k medi tra i termini q^n, q^{n+1} della progressione per quoziente e i termini nx, $(n+1)x$ della progressione per differenza, le ragioni delle progressioni formate da questi medi saranno

$$\sqrt[k+1]{q}, \quad \frac{x}{k+1},$$

e il p^{esimo} medio sarà, nella progressione per quoziente,

$$q^n \times (\sqrt[k+1]{q})^p,$$

e, nella progressione per differenza,

$$nx + \frac{px}{k+1}$$

Ma abbiamo

$$q^n \times (\sqrt[k+1]{q})^p = q^{n+\frac{p}{k+1}},$$

$$nx + \frac{px}{k+1} = x\left(n + \frac{p}{k+1}\right),$$

e poichè x è, per ipotesi, il logaritmo di q, il secondo di questi numeri sarà il logaritmo del primo (277).

282. Abbiamo veduto che un sistema di logaritmi, quale si è definito in algebra, può sempre derivarsi dalla considerazione di due progressioni convenientemente scelte, e rientra nei sistemi considerati in aritme-

tica. Si può anche dimostrare che il sistema di logaritmi definito da due progressioni qualunque sodisfà sempre alla definizione data (274).

Infatti, sia il sistema definito dalle due progressioni

$$1,\ q,\ q^2, \ldots q^n,$$
$$0,\ \delta,\ 2\delta, \ldots n\delta.$$

Poniamo

$$q^n = \beta,\quad n\delta = \gamma;$$

γ sarà il logaritmo di β. Dalla seconda equazione si ricava

$$n = \frac{\gamma}{\delta},$$

e sostituendo questo valore nella prima,

$$q^{\frac{\gamma}{\delta}} = \beta,$$

ossia

$$\left(q^{\frac{1}{\delta}}\right)^{\gamma} = \beta;$$

γ è dunque la potenza alla quale bisogna inalzare la base fissa $q^{\frac{1}{\delta}}$ per riprodurre il numero β, e secondo la definizione dell' algebra (274), è il logaritmo di β nel sistema a base $q^{\frac{1}{\delta}}$.

Come si passa da un sistema ad un altro.

283. Il numero a, il quale inalzato a differenti potenze dà tutti i numeri, si chiama la base del sistema de' logaritmi che si considera. Mutando la base, tutti i logaritmi si mutano, ma è facile accorgersi che conservano valori proporzionali, e rimangono tutti moltiplicati per uno stesso fattore che si chiama modulo di un sistema rispetto all' altro.

Siano a ed a' due basi qualunque, e x, x' i logaritmi di uno stesso numero b nei due sistemi, in modo che sia

(1) $$a^x = b,$$
(2) $$a'^{x'} = b.$$

Prendiamo i logaritmi, a base a', dei due membri dell'equazione (1), avremo

(3) $$x l_{a'} a = l_{a'} b,$$

indicando con $l_{a'}$ il logaritmo di un numero preso nel sistema a base a'. Ora, rammentandosi che x è il logaritmo di b, a base a, l'equazione (3) prova che i due logaritmi di un numero qualunque b, presi nei sistemi a basi a' ed a, hanno per rapporto il numero costante $l_{a'} a$.

Avremmo potuto prendere egualmente i logaritmi a base a dei due membri della equazione (2), e avremmo ottenuto

$$x' l_a a' = l_a b.$$

Onde si deduce che il rapporto dei due logaritmi di un numero qualunque b, presi rispettivamente nei sistemi a base a' ed a, è eguale ad $\frac{1}{l_a a'}$. Avevamo trovato sopra che questo stesso rapporto è $l_{a'} a$; dunque, perchè i due risultati coincidano dovrà essere

$$l_a a' = \frac{1}{l_{a'} a}.$$

Questa eguaglianza è evidente; infatti, ponendo

$$l_a a' = y, \quad l_{a'} a = z,$$

si ha, per definizione,

$$a^y = a', \quad a'^z = a;$$

e ponendo nella seconda equazione il valore di a' dato

dalla prima, si ottiene

$$(a^y)^z = a^{yz} = a,$$

ossia

$$yz = 1.$$

Logaritmi volgari.

284. I logaritmi dei quali comunemente ci serviamo sono quelli dei quali sono state calcolate le tavole colla base eguale a 10. È stata spiegata in aritmetica la disposizione e l' uso di queste tavole, e non importerà tornarci sopra. Diremo soltanto qualche cosa dei logaritmi negativi dei quali non fu fatta parola in aritmetica.

Logaritmi negativi.

285. Se la base a è >1, e il numero b che si considera è <1, l' equazione

$$a^x = b$$

darà per x un valore negativo; perchè abbiamo veduto (271) che per far prendere ad a^x i valori compresi tra 1 e 0 bisogna fare variare x tra 0 e $-\infty$. Quindi i numeri minori dell' unità hanno i logaritmi negativi. Questi logaritmi godono tutte le proprietà dimostrate di sopra, perchè non abbiamo fatta finquì veruna ipotesi sul segno dei numeri considerati. Osserveremo soltanto che i logaritmi negativi non sono dati direttamente dalle tavole; ma la loro determinazione non offrirà difficoltà. Infatti supponiamo che il numero $b<1$ sia dato sotto la forma di una frazione $\frac{m}{n}$, avremo

$$\log\frac{m}{n} = \log m - \log n = -(\log n - \log m),$$

e quindi il logaritmo negativo si otterrà mediante una sottrazione. Nel calcolo è comodo preparare il logaritmo in guisa che ne sia negativa soltanto la caratteristica; perciò si aggiungerà alla parte intera di $\log m$ un tal numero che se ne possa sottrarre $\log n$; la differenza sarà la parte decimale del logaritmo cercato, e gli si darà, per caratteristica negativa, il numero intero che abbiamo aggiunto a $\log m$.

ESEMPIO. Si debba calcolare $\log \frac{3}{47}$; avremo

$$\log \frac{3}{47} = \log 3 - \log 47 = 0,47712125 - 1,67209786$$
$$= 2,47712125 - 1,67209786 - 2$$
$$= 0,80502339 - 2 = \bar{2},80502339.$$

Il segno — sopra la caratteristica indica che soltanto essa è negativa.

Osservazione sulle questioni di frutti.

286. Si dimostra in aritmetica (*) che una somma C impiegata al frutto composto diviene dopo n anni

$$C\left(1+\frac{r}{100}\right)^n,$$

indicando r il quanto per cento l'anno è stato convenuto di frutto. Le convenzioni relative agli esponenti negativi e frazionari danno il modo di rendere questa formula più generale.

1°. Se n è frazionario e rappresentato da $\frac{p}{q}$, supponiamo che il principio dei frutti composti si estenda

(*) Vedi *Aritmetica di Bertrand*, n° 451.

alle frazioni di anno, e chiamiamo x il quanto per cento di frutto si ha in $\frac{1}{q}$ di anno.

L' unità di moneta rendendo $\frac{x}{100}$ dopo $\frac{1}{q}$ di anno, dopo questo tempo diviene $1+\frac{x}{100}$, e una somma qualunque nello stesso tempo diverrà moltiplicata per $1+\frac{x}{100}$. Se dunque si pone a frutto l' unità di moneta per $\frac{q}{q}$ di anno, cioè per un anno intero, diverrà moltiplicata q volte per $1+\frac{x}{100}$, ossia per $\left(1+\frac{x}{100}\right)^q$; e poichè deve divenire $1+\frac{r}{100}$, avremo

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^q=1+\frac{r}{100};$$

onde si deduce

$$1+\frac{x}{100}=\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

È evidente che l' unità di moneta impiegata al frutto composto per $\frac{p}{q}$ di anno diverrà moltiplicata per $\left(1+\frac{x}{100}\right)^p$, ossia per $\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{p}{q}}$, e quindi una somma qualunque C diverrà

$$C\left(1+\frac{r}{100}\right)^{\frac{p}{q}}$$

2°. Se n è negativo, considereremo la questione nel modo seguente:

Una somma che oggi vale C è posta a frutto da un tempo indeterminato; quanto valeva n anni fa?

Indicando con X il valore incognito, X posto a frutto per n anni è divenuto C; quindi

$$C = X\left(1+\frac{r}{100}\right)^n,$$

onde

$$X = C\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}.$$

Esercizi.

1°. Risolvere l'equazioni

$$x^y = y^x,$$
$$x^p = y^q.$$

2°. Risolvere l'equazione

$$3^{2x}\, 5^{3x-4} = 7^{x-1}\, 11^{2-x}.$$

3°. Risolvere l'equazione

$$(a^4-2a^2b^2+b^4)^{x-1} = \frac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2}.$$

4°. Risolvere l'equazione

$$5^{x+1}+5^{x-2}-5^{x-3}+5^{x-4} = 4739.$$

5°. Risolvere l'equazione

$$3^{x^2-4x+5} = 1200.$$

CAPITOLO XXII.

SOPRA LE ESPRESSIONI CHE SI PRESENTANO SOTTO FORMA INDETERMINATA.

—

287. Quando i due termini di una frazione si annullano contemporaneamente per valori delle lettere che contengono, l' operazione indicata da quella non ha più significato. Qualche volta compariscono espressioni di questa forma, cercando risolvere un problema indeterminato (Cap. VI). Qualche volta anche la frazione prende questa forma indeterminata per un fattore eguale a zero, per il quale sono stati moltiplicati i due termini della frazione, o i due membri di una dell' equazioni dalle quali è derivata. Ne abbiamo veduto un esempio (100). In ogni caso, bisogna esaminare accuratamente l'origine della espressione proposta, per riconoscere se i ragionamenti che vi hanno condotto sono difettosi, per una delle cagioni che abbiamo dette o per altre analoghe. Se poi sia dimostrato, con tutto il rigore desiderabile, che i ragionamenti fatti sono giusti, e che il problema proposto è risoluto quando è verificata l' equazione

$$Ax = B,$$

ossia (se A non è nullo) quando

$$x = \frac{B}{A},$$

è chiaro che una ipotesi che annullerà nello stesso

tempo A e B permetterà di prendere x arbitrariamente, poichè si ha, qualunque sia x,

$$0 \times x = 0.$$

288. Anche quando si trovano in difetto i ragionamenti che hanno condotto a un' espressione che prende la forma $\frac{0}{0}$, per trovare il vero valore della incognita che essa rappresenta, ci possiamo molte volte servire della medesima, invece di tornare a risolvere la quistione in altro modo che sia perfettamente rigoroso. Infatti, osserviamo che questa espressione, della quale possiamo servirci finchè non ha preso la forma $\frac{0}{0}$, darà la soluzione del problema per ipotesi differenti tanto poco quanto vogliamo da quella per cui nasce la difficoltà. Se dunque la quistione è tale che un piccolissimo cangiamento nei dati ne debba portare uno piccolissimo nei risultati, ossia se l' incognita dev' essere una funzione continua (269*) delle quantità date, quando i due termini della frazione si avvicinano a zero, il loro rapporto si andrà indefinitamente avvicinando al valore che cerchiamo, e ne differirà tanto poco quanto si vuole; dunque questo sarà il *limite* (*) della stessa espressione. Questo limite si suol chiamare il valor vero della frazione che diviene $\frac{0}{0}$.

289. Per trovare il valor vero di una espressione che, per una data ipotesi, si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$, bisogna transformarla in altra che le sia eguale e non dia luogo alla stessa difficoltà. Daremo alcune regole per il caso nel quale l' espressione considerata diviene $\frac{0}{0}$,

(*) Vedi Nota VI.

in conseguenza di un valore particolare attribuito a una *sola* delle lettere che essa contiene.

290*. Quando, sopra un espressione che diviene $\frac{0}{0}$ per un dato valore di una lettera che essa contiene, per esempio per $x=a$, dovremo effettuare le transformazioni necessarie perchè non si presenti più sotto questa forma, saremo in diritto di moltiplicare o dividere i due membri di una equazione e i due termini di una frazione per espressioni che sono eguali a zero per $x=a$, e con questo non siamo in contradizione con quello che fu avvertito (43), perchè da quello che abbiamo detto sopra risulta che queste transformazioni debbono servire soltanto a farci conoscere i valori corrispondenti a tutti i valori di x differenti da a, dalla cognizione dei quali deduciamo quello corrispondente ad $x=a$, che deve essere il limite dei medesimi, affinchè tra i valori di x vi sia continuità.

291. ***Caso in cui l' espressione considerata è il quoziente di due polinomi interi.***

Sia la frazione

$$F=\frac{x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+\ldots\ldots+B_n}{x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots\ldots+A_m},$$

la quale, per $x=a$, prende la forma $\frac{0}{0}$. Il numeratore e il denominatore annullandosi per $x=a$, sono ambedue divisibili (147) per $x-a$. Togliendo questo fattore comune, la frazione F prenderà la forma

$$F=\frac{x^{n-1}+B'_1x^{n-2}+B'_2x^{n-3}+\ldots\ldots+B'_{n-1}}{x^{m-1}+A'_1x^{m-2}+A'_2x^{m-3}+\ldots\ldots+A'_{m-1}}.$$

Se i due termini non si annullano più per $x=a$, non rimarrà altro da farsi, che sostituire questo valore

di x, e si otterrà così il valor vero di F. Se si annullano tuttora, li divideremo nuovamente per $x-a$, e così di seguito, finchè non si trovi una frazione che non presenti più la stessa difficoltà. È evidente che questa si troverà sempre, perchè ogni volta che si dividono per $x-a$ i due termini della frazione proposta, il loro grado diminuisce di una unità, e se l'operazione non avesse termine prima, si troverebbe finalmente un quoziente indipendente da x.

APPLICAZIONE. Determinare il valor vero di

$$F=\frac{x^4+ax^3-3a^2x^2-a^3x+2a^4}{x^4-ax^3-13a^2x^2+25a^3x-12a^4},$$

per $x=a$.

Dividendo i due termini per $x-a$, la frazione F diviene

$$\frac{x^3+2ax^2-a^2x-2a^3}{x^3-13a^2x+12a^3}.$$

Anche questa, per $x=a$ prende la forma $\frac{0}{0}$. Ma, dividendo i due termini per $x-a$, diviene

$$\frac{x^2+3ax+2a^2}{x^2+ax-12a^2},$$

che, per $x=a$, prende il valore $-\frac{6}{10}$ ossia $-\frac{3}{5}$. Si ha dunque

$$F=-\frac{3}{5}.$$

292. *Caso delle espressioni irrazionali.*

Ci limiteremo anche qui al caso in cui prendono una forma indeterminata, per un valore attribuito a una sola lettera.

Cominceremo da esaminare l' espressione della forma

$$F=\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a},$$

che, evidentemente, diviene $\frac{0}{0}$, per $x=a$. A questa si possono ridurre quasi tutte le altre. Ponendo $\sqrt[m]{x}=x'$, $\sqrt[m]{a}=a'$, e quindi $x=x'^m$, $a=a'^m$, l' espressione F diviene

$$\frac{x'-a'}{x'^m-a'^m},$$

ossia, dividendo i due termini per $x'-a'$,

$$\frac{1}{x'^{m-1}+a'x'^{m-2}+\ldots+a'^{m-1}},$$

che, per $x'=a'$, diviene

$$\frac{1}{ma'^{m-1}},$$

cioè

$$\frac{1}{m\sqrt[m]{a^{m-1}}}.$$

293. Consideriamo ora una espressione che contenga un numero qualunque di radicali, e divenga $\frac{0}{0}$ per un valore attribuito a una delle lettere che contiene. Sia

$$(1)\qquad F=\frac{P+\sqrt[m]{Q}+\sqrt[n]{R}-\sqrt[p]{S}}{P'+\sqrt[m']{Q'}+\sqrt[n']{R'}-\sqrt[p']{S'}-\sqrt[r']{T'}},$$

ove P, Q, R, S, P', Q', R', S', T' sono polinomi interi rispetto ad x, e sia $x=a$ il valore di x per cui F di-

viene $\frac{0}{0}$, in modo che, indicando con P_a, Q_a, R_a, S_a, P'_a, Q'_a, R'_a, S'_a, T'_a i valori di questi polinomi quando vi si pone a in luogo di x, si abbia

$$(2) \qquad P_a+\sqrt[m]{Q_a}+\sqrt[n]{R_a}-\sqrt[p]{S_a}=0,$$

$$(3) \qquad P'_a+\sqrt[m']{Q'_a}+\sqrt[n']{R'_a}-\sqrt[p']{S'_a}-\sqrt[r']{T'_a}=0.$$

Potremo scrivere il valore di F sotto la forma

$$(4)\ F=\frac{P-P_a+\left(\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a}\right)+\left(\sqrt[n]{R}-\sqrt[n]{R_a}\right)-\left(\sqrt[p]{S}-\sqrt[p]{S_a}\right)}{P'-P'_a+\left(\sqrt[m']{Q'}-\sqrt[m']{Q'_a}\right)+\left(\sqrt[n']{R'}-\sqrt[n']{R'_a}\right)-\left(\sqrt[p']{S'}-\sqrt[p']{S'_a}\right)-\left(\sqrt[r']{T'}-\sqrt[r']{T'_a}\right)}$$

perchè basta sottrarre dai suoi due termini i primi membri dell' equazioni (2) e (3) che sono ambedue eguali a zero.

Ora, se dividiamo ambedue i termini di F per $x-a$, otterremo

$$(5)\ F=\frac{\frac{P-P_a}{x-a}+\frac{\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a}}{x-a}+\frac{\sqrt[n]{R}-\sqrt[n]{R_a}}{x-a}-\frac{\sqrt[p]{S}-\sqrt[p]{S_a}}{x-a}}{\frac{P'-P'_a}{x-a}+\frac{\sqrt[m']{Q'}-\sqrt[m']{Q'_a}}{x-a}+\frac{\sqrt[n']{R'}-\sqrt[n']{R'_a}}{x-a}-\frac{\sqrt[p']{S'}-\sqrt[p']{S'_a}}{x-a}-\frac{\sqrt[r']{T'}-\sqrt[r']{T'_a}}{x-a}}$$

e per trovare il valor vero di F, basterà trovare quelli

delle frazioni, $\frac{P-P_a}{x-a}$, $\frac{\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a}}{x-a}$, $\frac{\sqrt[n]{R}-\sqrt[n]{R_a}}{x-a}$, ec.,

che si presentano tutte sotto la forma $\frac{0}{0}$. La prima frazione, che non contiene radicali, si calcolerà col metodo dato (291), ed è evidente che basterà dividere $P-P_a$ per $x-a$, e porre $x=a$ nel risultato. Poichè tutte le altre frazioni hanno forma eguale, basterà considerarne

una soltanto, per esempio

$$\frac{\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a}}{x-a}.$$

Questa espressione può scriversi nel modo seguente:

$$\frac{\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a}}{Q-Q_a}\cdot\frac{Q-Q_a}{x-a}.$$

Ora, ambedue i fattori hanno un limite, che sappiamo calcolare. Infatti, quando x si approssima ad a, Q si approssima a Q_a, e $\frac{\sqrt[m]{Q}-\sqrt[m]{Q_a}}{Q-Q_a}$ può paragonarsi all'espressione $\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$ considerata (292): quindi il suo valor vero è

$$\frac{1}{m\sqrt[m]{Q_a^{m-1}}}.$$

Quanto a $\frac{Q-Q_a}{x-a}$, che non contiene radicali, il suo valor vero si troverà col metodo esposto (291).

Esempio. Trovare, per $x=1$, il valor vero della frazione

$$(1)\quad F=\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[2]{x+1}+\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[5]{20x+12}}{x^2+1+\sqrt[2]{3x+1}-\sqrt[3]{63x+1}}.$$

È facile assicurarsi che questa frazione diviene $\frac{0}{0}$ per $x=1$: perchè, per questo valore il numeratore diviene

$$\sqrt[3]{8}-\sqrt[2]{2}+\sqrt[4]{4}-\sqrt[5]{32}=2-\sqrt[2]{2}+\sqrt[2]{2}-2=0,$$

e il denominatore diviene

$$2+\sqrt[2]{4}-\sqrt[3]{64}=2+2-4=0.$$

Seguendo il metodo indicato, porremo la frazione F sotto la forma

$$(2)\ \frac{\left(\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[3]{8}\right)-\left(\sqrt[2]{x+1}-\sqrt[2]{2}\right)+\left(\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[4]{4}\right)-\left(\sqrt[5]{20x+12}-\sqrt[5]{32}\right)}{x^2+1-2+\left(\sqrt[2]{3x+1}-\sqrt[2]{4}\right)-\left(\sqrt[3]{63x+1}-\sqrt[3]{64}\right)},$$

e, dividendo i due termini per $x-1$,

$$(3)\ \frac{\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[3]{8}}{x-1}-\frac{\sqrt[2]{x+1}-\sqrt[2]{2}}{x-1}+\frac{\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[4]{4}}{x-1}-\frac{\sqrt[5]{20x+12}-\sqrt[5]{32}}{x-1}}{\frac{x^2+1-2}{x-1}+\frac{\sqrt[2]{3x+1}-\sqrt[2]{4}}{x-1}-\frac{\sqrt[3]{63x+1}-\sqrt[3]{64}}{x-1}}$$

Ora, abbiamo

$$(4)\quad \frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[3]{8}}{x-1}=\frac{\sqrt[3]{2x+6}-\sqrt[3]{8}}{2x+6-8}\cdot\frac{2x-2}{x-1},$$

$$(5)\quad \frac{\sqrt[2]{x+1}-\sqrt[2]{2}}{x-1}=\frac{\sqrt[2]{x+1}-\sqrt[2]{2}}{x+1-2},$$

$$(6)\quad \frac{\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[4]{4}}{x-1}=\frac{\sqrt[4]{5x-1}-\sqrt[4]{4}}{5x-1-4}\cdot\frac{5x-5}{x-1},$$

$$(7)\quad \frac{\sqrt[5]{20x+12}-\sqrt[5]{32}}{x-1}=\frac{\sqrt[5]{20x+12}-\sqrt[5]{32}}{20x+12-32}\cdot\frac{20x-20}{x-1},$$

$$(8)\quad \frac{x^2+1-2}{x-1}=x+1,$$

$$(9)\quad \frac{\sqrt[2]{3x+1}-\sqrt[2]{4}}{x-1}=\frac{\sqrt[2]{3x+1}-\sqrt[2]{4}}{3x+1-4}\cdot\frac{3x-3}{x-1},$$

$$(10)\quad \frac{\sqrt[3]{63x+1}-\sqrt[3]{64}}{x-1}=\frac{\sqrt[3]{63x+1}-\sqrt[3]{64}}{63x+1-64}\cdot\frac{63x-63}{x-1}.$$

Applicando i metodi esposti sopra, si trova facilmente che i veri valori dell'espressioni (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), per $x=1$, sono

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{64}}\,2,\ \frac{1}{2\sqrt{2}},\ \frac{1}{4\sqrt[4]{64}}\,5,\ \frac{1}{5\sqrt[5]{(32)^4}}\,20,\ 2,\ \frac{1}{2\sqrt{4}}\,3,\ \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}}\,63;$$

onde il valore vero di F sarà

$$\frac{\dfrac{2}{3\sqrt[3]{64}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{5}{4\sqrt[4]{64}}-\dfrac{20}{5\sqrt[5]{(32)^4}}}{2+\dfrac{3}{2\sqrt{4}}-\dfrac{63}{3\sqrt[3]{(64)^2}}}=\frac{\dfrac{1}{8\sqrt{2}}-\dfrac{1}{12}}{\dfrac{23}{16}}=\frac{\sqrt{2}-\dfrac{4}{3}}{23}.$$

294. Osservazione. Il solo caso d'eccezione che presenta il metodo precedente è quello in cui sommando i veri valori delle diverse frazioni nelle quali abbiamo decomposto il numeratore e il denominatore della frazione proposta, si trova tuttavia per risultato $\frac{0}{0}$. Se uno solo dei due termini diviene nullo, non vi è difficoltà; la frazione converge verso zero quando si annulla il solo numeratore, cresce indefinitamente quando si annulla il solo denominatore.

Sopra le frazioni che prendono la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

295. Quando i due termini di una frazione aumentano indefinitamente col valore di una lettera variabile che contengono, è utile qualche volta determinare il valore limite di questa frazione. Per ottenerlo, si debbono dividere i due termini per una potenza tale della lettera che aumenta indefinitamente, che nessuno di loro divenga più infinito, e che nonostante non tendano ambedue verso zero; il limite diviene allora evidente.

Esempio 1°. Limite di

$$\frac{x^5+3x^2-4x+1}{7x^5+x^4+x^2},$$

quando x aumenta indefinitamente. Dividendo per x^5 i due termini della frazione, si ottiene

$$\frac{1+\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{7+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}};$$

espressione, che quando x aumenta indefinitamente, si approssima evidentemente al valore $\frac{1}{7}$.

Esempio 2°. Limite di

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+5x+1}+2x}{\sqrt[4]{5x^4+3x+1}+\sqrt[2]{x^2+1}},$$

quando x aumenta indefinitamente. Dividendo per x i due termini della frazione, essa diviene

$$\frac{\sqrt[3]{1+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}+2}{\sqrt[4]{5+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}+\sqrt[2]{1+\frac{1}{x^2}}};$$

e quando x aumenta indefinitamente, si approssima a

$$\frac{\sqrt[3]{1}+2}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[2]{1}}=\frac{3}{1+\sqrt[4]{5}}.$$

296. Osservazione I. Se dopo la divisione il numeratore avesse per limite 0, e il denominatore un limite

differente da 0, la frazione proposta convergerebbe verso 0; nel caso opposto, crescerebbe indefinitamente.

ESEMPIO.

$$\frac{5x^2+7x+1}{x^3+2x+1},$$

converge verso 0 quando x aumenta; e

$$\frac{\sqrt{x^3+2x+7}}{x+1},$$

aumenta indefinitamente. Ce ne assicuriamo facilmente dividendo per x^3 i due termini della prima frazione, e per x quelli della seconda.

297. OSSERVAZIONE II. Se si trovasse difficoltà a determinare la potenza di x, per la quale conviene dividere i due termini della frazione, bisognerebbe dividere per una potenza indeterminata x^α, e quindi determinare il valore di α in modo che nessun termine divenisse infinito con x, e che tutti non divenissero nulli.

ESEMPIO. Trovare il limite di

$$\frac{\sqrt[7]{x^3+4x+1}+\sqrt[8]{x^4+5x+1}}{\sqrt[5]{x^2+x+3}+\sqrt[6]{2x^8+3}}.$$

Dividiamo i termini per x^α; la frazione diverrà

$$\frac{\sqrt[7]{x^{3-7\alpha}+4x^{1-7\alpha}+\frac{1}{x^{7\alpha}}}+\sqrt[8]{x^{4-8\alpha}+5x^{1-8\alpha}+\frac{1}{x^{8\alpha}}}}{\sqrt[5]{x^{2-5\alpha}+x^{1-5\alpha}+\frac{3}{x^{5\alpha}}}+\sqrt[6]{2x^{8-6\alpha}+\frac{3}{x^{6\alpha}}}}.$$

Per sodisfare alle condizioni enunciate, bisogna procu-

rare che nessun esponente sia positivo. Dunque si dovrà avere (*)

$$3-7\alpha \leqq 0,\quad 2-5\alpha \leqq 0,$$
$$4-3\alpha \leqq 0,\quad 8-6\alpha \leqq 0;$$

onde si conclude

$$\alpha \geq \frac{3}{7},\quad \alpha \geq \frac{2}{5},$$
$$\alpha \geq \frac{4}{3},\quad \alpha \geq \frac{8}{6},$$

e il minimo valore di α, che sodisfaccia a tutte queste condizioni, è $\alpha = \frac{4}{3}$; che è quello che dovremo prendere; poichè un valore maggiore renderebbe tutti i termini nulli per $x = \infty$. Facendo $\alpha = \frac{4}{3}$, e sopprimendo tutte le potenze negative di x, che divengono nulle quando x aumenta indefinitamente, si vede che il limite della frazione proposta è

$$\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[6]{2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}.$$

Espressioni che si presentano sotto la forma $\infty - \infty$.

298. Considereremo soltanto il caso in cui l'espressione che si presenta sotto la forma $\infty - \infty$ è la differenza di due radicali di secondo grado, o di un radicale di secondo grado e di un polinomio razionale.

Sia la differenza

$$\sqrt{P} - \sqrt{Q},$$

dove P e Q sono due polinomi in x, che divengono

(*) I segni $\leq \geq$ significano minore o eguale, maggiore o eguale.

ambedue infiniti, quando i valori attribuiti a questa lettera aumentano indefinitamente. Moltiplichiamo e dividiamo questa differenza per $\sqrt{P}+\sqrt{Q}$: essa prenderà la forma

$$\frac{P-Q}{\sqrt{P}+\sqrt{Q}}.$$

Se il polinomio $P-Q$ è indipendente da x, poichè il denominatore aumenta indefinitamente col valore di questa lettera, la frazione diminuirà indefinitamente e convergerà verso zero. Se $P-Q$ contiene x, aumenta indefinitamente, e la quistione si riduce a trovare il valor vero di una frazione che prende la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Esempio. Trovare il valor vero di

$$\sqrt[2]{x^2-7x+1}-x$$

quando x aumenta indefinitamente.

La differenza proposta equivale a

$$\frac{x^2-7x+1-x^2}{\sqrt{x^2-7x+1}+x}=\frac{1-7x}{x+\sqrt{x^2-7x+1}},$$

e dividendo ambedue i termini per x,

$$\frac{\frac{1}{x}-7}{1+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}},$$

che, coll'aumentare di x, converge verso

$$\frac{-7}{1+\sqrt{1}}=\frac{-7}{2}.$$

Sopra le espressioni che contengono più lettere variabili.

299. Quando una espressione prende forma indeterminata per più valori simultanei attribuiti a lettere che contiene, si deve riguardare, in generale, come indeterminata. Il limite verso il quale converge quando le lettere si approssimano ai valori che vogliamo attribuire alle medesime, dipende dalla legge con cui accade l'approssimazione, cioè dalle relazioni che i loro valori mantengono nella variazione.

Consideriamo, per esempio, l'espressione

$$\frac{x+y-3}{xy-2},$$

la quale per $x=1, y=2$, diviene $\frac{0}{0}$. Poniamo $x=1+\alpha$ $y=2+\beta$; questa espressione diverrà

$$\frac{\alpha+\beta}{2\alpha+\beta+\alpha\beta},$$

ossia, dividendo sopra e sotto per β,

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}+1}{\frac{2\alpha}{\beta}+1+\alpha},$$

e il limite dei valori, che prende questa espressione quando α e β convergono verso zero, dipenderà dal limite del valore di $\frac{\alpha}{\beta}$. Se, per esempio $\alpha=m\beta$, il valore di $\frac{\alpha}{\beta}$ sarà m, e avremo per limite dell'espressione proposta

$$\frac{m+1}{2m+1},$$

il quale per una scelta conveniente della quantità arbitraria m, potrà prendere un valore qualunque.

300. Osservazione. Una espressione che si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$ è, *in generale*, indeterminata, se prende questa forma per valori attribuiti a più lettere; ma vi sono eccezioni. Spesso, per esempio, un frazione che si presenta sotto forma $\frac{0}{0}$, per un fattore comune ai due termini che si annulla, non offre più indeterminazione dopo che si è tolto questo fattore.

Esempio. -

$$\frac{x^2+2xy+y^2-4}{x+y-2},$$

diviene $\frac{0}{0}$ per $x=1, y=1$. Ma, osservando che il numeratore può scriversi

$$(x+y-2)(x+y+2),$$

il fattore $x+y-2$ potrà togliersi ai due termini della frazione, e rimarrà $x+y+2$, che per $x=1$, $y=1$, diviene eguale a 4.

Esercizi.

1°. Trovare il limite del rapporto

$$\frac{B'-A'}{B-A},$$

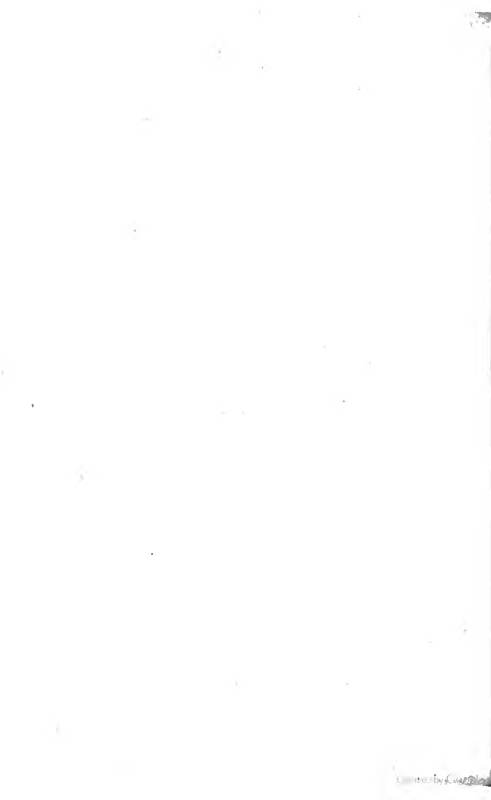
quando B converge verso A, e si ha $A'=\sqrt{BA}$, $B'=\frac{2AB}{A+A'}$.

2°. Trovare il limite di

$$\sqrt[3]{x^3-1}-x,$$

quando x aumenta indefinitamente.

3°. Trovare per $x = 1$ il valor vero di

$$\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt{43x+6}}-\sqrt[4]{x^2+1+\sqrt{195x+1}}}{\sqrt[3]{5x+3}-\sqrt{x^2-x+4}}.$$

NOTA I'.

SOPRA I NUMERI NEGATIVI.

—

301'. L'introduzione nell'algebra di numeri, ai quali si attribuiscono proprietà di convenzione e che non hanno significato, come si fa nel testo (7), può far nascere qualche difficoltà in chi comincia lo studio di questa scienza, e non sembrare abbastanza giustificata dallo scopo di rendere più semplici alcuni risultati. Ma si spiega facilmente, anche nel principio dell'algebra, il significato di questi numeri che si sono chiamati *negativi* e dal medesimo derivano naturalmente le proprietà attribuite loro per convenzione nel testo. Basta osservare che l'aritmetica, da cui l'algebra elementare prende il significato e le leggi di combinazione dei suoi segni, ha per *unico* scopo, come dice il ch. signor Terquem, d'insegnare a contare in avanti e indietro e di ottenere il risultato finale per la via più breve. Per ispiegarci più chiaramente, prendiamo a considerare una moltitudine indefinita di oggetti disposti sopra una linea; indicando con A uno qualunque di questi, i numeri che si ottengono contando una certa quantità di oggetti in avanti, cioè andando da A, per esempio, verso la destra, si chiamano *positivi* e si scrivono come i numeri ordinari dell'aritmetica. L'operazione che consiste nel contare un certo numero di oggetti andando nello stesso senso in cui siamo andati per formare il numero stesso, s'indica col segno $+$; l'operazione che consiste

nel contare un numero in senso opposto a quello in cui si è contato per formarlo, s' indica col segno —; quindi i numeri che si ottengono contando indietro, cioè andando da A verso sinistra, si distinguono premettendo loro il segno —, e si chiamano *negativi.*

302*. Il significato che qui abbiamo dato ai segni $+$ e $-$ si accorda bene con quello che si dà loro comunemente in aritmetica. Infatti, l' espressione $a+b$ significa un numero a di oggetti contato in avanti e un numero b di oggetti contato egualmente, ossia esprime il risultato dell' addizione aritmetica dei due numeri a e b contato in avanti. L' espressione $a-b$ indica le due operazioni di contare un numero a di oggetti in avanti, e poi di tornare indietro di un numero b dei medesimi; quindi è chiaro che, se a è $> b$, indica che si deve contare in avanti la differenza tra a e b, cioè esprime esattamente il risultato dell' operazione chiamata sottrazione in aritmetica; se a è $< b$ indica che si deve contare indietro la differenza tra b ed a; quindi

$$a-b=-(b-a)$$

non è una convenzione (10), ma un risultato.

303*. Le convenzioni (7) divengono ora conseguenze evidenti delle definizioni (301*); perchè si possono enunciare nel modo seguente:

Effettuare sopra un numero negativo l' operazione indicata dal segno $+$ (sommare) equivale ad effettuare l' operazione indicata dal segno $-$ (sottrarre) sopra il medesimo numero positivo.

Fare l' operazione indicata dal segno $-$ (sottrarre) sopra un numero negativo equivale a fare l' operazione indicata dal segno $+$ (sommare) sopra il medesimo numero positivo.

304*. Osservazione. Non abbiamo parlato altro

che di numeri interi, perchè i numeri frazionari non sono altro che interi, nei quali l'unità invece di essere 1 è una parte di 1. $\frac{7}{3}$ è lo stesso che 7, se non che l'unità di questo numero invece di essere rappresentate da 1, sono rappresentate da $\frac{1}{3}$.

NOTA II*.

SOPRA I DETERMINANTI.

Definizioni e notazioni.

305*. Prendiamo il prodotto

$$P = a_1 a_2 a_3 \dots a_n (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_i - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \dots$$
$$\dots (a_i - a_2) \dots (a_n - a_2)(a_4 - a_3) \dots (a_n - a_3) \dots (a_n - a_{n-1}),$$

che risulta dal moltiplicare tra loro n quantità $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ e le differenze delle medesime, nelle quali sempre è presa col segno *meno* la quantità che ha l'indice minore. Questo prodotto conterrà un gran numero di termini, nei quali le quantità $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ avranno diversi esponenti. Se gli esponenti si riguardino come indici superiori che servano a distinguere tra loro le quantità rappresentate da quelle lettere, se, per esempio, a_i^k non sia eguale alla k^{esima} potenza di a_i, ma significhi una quantità affatto indipendente da a_i, il polinomio P diverrà un polinomio Δ che non conterrà, come P, n sole quantità indipendenti tra loro innalzate a potenze differenti, ma n^2 quantità indipendenti tra loro, ciascuna al primo grado. P e Δ saranno scritti egualmente, ma rappresenteranno valori molto differenti.

Il polinomio Δ si chiama *determinante*, e si rappresenta colla notazione

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \dots & a_n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Le differenti quantità $a_1^1, a_1^2, \dots a_2^1, a_2^2, \dots a_n^n$ si chiamano gli *elementi* del determinante.

Gli elementi che si trovano sopra una medesima linea orizzontale si dice che formano una *linea*, quelli che si trovano sopra una medesima linea verticale formano una *colonna*.

Gli elementi che hanno eguali tra loro i due indici, come $a_1^1, a_2^2, a_3^3, \dots$, si dicono elementi *principali*.

Gli elementi che si deducono uno dall'altro permutando tra loro i due indici, come a_m^n e a_n^m, si dicono *coniugati*.

Il numero degli elementi di una linea di un determinante dicesi l'*ordine* del medesimo. Così il determinante (1) è di ordine n.

Qui accenneremo soltanto alcune poche proprietà dei determinanti, riserbando all'algebra superiore più ampio svolgimento della loro teorica oggi divenuta tanto importante nell'analisi algebrica.

Proprietà principali dei determinanti.

306* Teorema 1°. *Se in un determinante si permutano tra loro di posto due colonne, esso muta segno, mantenendo lo stesso valore.*

Infatti, mutare di posto nel determinante due colonne, per esempiò la b^{esima} e la c^{esima}, equivale a cambiare nel polinomio P a_b in a_c e a_c in a_b. Ora questo cambiamento non muta altro che i fattori nei quali compariscono a_b o a_c, cioè, supponendo $b > c$, i soli fattori

$$(a_b-a_1)(a_b-a_2)\dots(a_b-a_{c-1})(a_b-a_c)(a_b-a_{c+1})\dots$$
$$(a_b-a_{b-1})(a_{b+1}-a_b)\dots(a_n-a_b),$$
$$(a_c-a_1)(a_c-a_2)\dots(a_c-a_{c-1})(a_{c+1}-a_c)\dots$$
$$\dots(a_{b-1}-a_c)(a_{b+1}-a_c)\dots(a_n-a_c).$$

La permutazione di a_b e a_c tra loro muta questi fattori gli uni negli altri; ma cambiandone alcuni di segno.

1°. I fattori

$$(a_c-a_1)(a_c-a_2)\dots(a_c-a_{c-1}),$$

e

$$(a_b-a_1)(a_b-a_2)\dots(a_b-a_{c-1}),$$

si cambiano gli uni negli altri.

2°. I fattori

$$(a_{c+1}-a_c)(a_{c+2}-a_c)\dots(a_{b-1}-a_c),$$

e

$$(a_b-a_{c+1})(a_b-a_{c+2})\dots(a_b-a_{b-1}),$$

si mutano gli uni negli altri, ma ciascuno diviene eguale e di segno contrario a quello che gli corrisponde; e abbiamo $2(b-c-1)$ cambiamenti di segno che, essendo in numero pari, non influiscono sul segno del prodotto.

3°. Il fattore a_b-a_c muta segno e non valore.

4°. I fattori

$$(a_{b+1}-a_c)(a_{b+2}-a_c)\dots(a_n-a_c),$$

e

$$(a_{b+1}-a_b)(a_{b+2}-a_b)\dots(a_n-a_b)$$

si permutano gli uni negli altri.

Ricapitolando; l'unico mutamento del prodotto è derivato dal cambiamento di segno di $a_b - a_c$; dunque P e in conseguenza il determinante Δ cambia soltanto di segno per la permutazione di a_b e a_c tra loro, ossia per la permutazione di due colonne.

307*. Osservazione. Permutando successivamente un numero pari di volte due a due differenti colonne del determinante non se ne cambierà il valore nè il segno; facendo un numero dispari di queste permutazioni, se ne cambierà soltanto il segno.

308*. Teorema 2°. *Se un determinante ha due colonne eguali è identicamente eguale a zero.*

Infatti, le due colonne eguali sieno la i^{esima} e la k^{esima}, cioè $a_i^1 = a_k^1$, $a_i^2 = a_k^2$, ... $a_i^n = a_k^n$; che equivale a supporre $a_i = a_k$ nel prodotto P. Ma P che ha per fattore la differenza $a_i - a_k$, si annulla per questa supposizione, e il risultato è zero, qualunque siano i valori attribuiti alle lettere $a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n$. Dunque i termini si devono distruggere, ed essere eguali due a due e di segni contrari; ora è evidente che questa identità non sarà alterata considerando gli esponenti come indici, per passare dall' espressione P al determinante Δ. Dunque Δ sarà identicamente nullo.

309*. Teorema 3°. *Moltiplicare o dividere tutti gli elementi di una colonna di un determinante per una quantità qualunque equivale a moltiplicare o dividere per questa il determinante stesso.*

Infatti, è chiaro che è lo stesso moltiplicare o dividere tutti i termini del determinante Δ per una quantità α, oppure moltiplicare o dividere per α in ciascuno di essi il solo fattore che è potenza di a_i (a_i comparisce in tutti, perchè è fattore di P (305*)), e questo equivale a moltiplicare o dividere per α tutti gli elementi della colonna i^{esima} di Δ.

Formazione dei determinanti.

310*. Da quanto abbiamo dimostrato si deduce il seguente modo di formazione dei termini di un determinante.

Teorema. *Un determinante si forma sommando tutti i prodotti che si ottengono permutando in tutti i modi possibili gl' indici inferiori del prodotto*

$$a_1^1\, a_2^2\, a_3^3 \ldots . a_n^n,$$

e dando il segno opposto a due prodotti che si deducono uno dall' altro permutando tra loro due indici inferiori.

Osserviamo primieramente che in ogni termine che si ottiene, effettuando i prodotti dei fattori di P, due lettere qualunque a_b, a_c non possono comparire col medesimo esponente.

Infatti, se a_b e a_c avessero lo stesso esponente in un termine, questo non cambierebbe per la permutazione di b con c; dunque, poichè questa permutazione (306*) cambia P in $-P$, il termine farebbe parte anche del polinomio $-P$, e quindi comparirebbe in P due volte con segni opposti, e si distruggerebbe.

Ogni termine contiene inoltre, almeno una volta, ciascuno degli n fattori a_1, $a_2, \ldots . a_n$; e poichè tutti debbono comparire con esponenti differenti, dovranno essere in ogni termine tutti gli esponenti $1, 2, 3, \ldots . n$, sebbene con ordine differente, in modo che il termine generale di P e in conseguenza anche di Δ sarà

$$(1) \qquad \pm\, a_1^\alpha\, a_2^\beta\, a_3^\gamma \ldots . a_n^\lambda\,,$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \lambda$ sono eguali ai numeri $1, 2, 3, \ldots . n$, presi in un ordine qualunque.

Permutando convenientemente i fattori, si può scrivere questo termine generale anche nel modo seguente:

$$(2) \qquad \pm a^1{}_{\alpha_1} a^2{}_{\alpha_2} a^3{}_{\alpha_3} \ldots . a^n{}_{\alpha_n},$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots . \alpha_n$ rappresentano i numeri $1, 2, 3, \ldots . n$ scritti in ordine qualunque.

Ora. permutando due indici inferiori (306*), Δ deve cambiar segno; quindi i termini positivi devono trasformarsi in quelli che erano negativi e viceversa. Facendo due permutazioni di due indici di seguito, i termini primitivamente positivi ritorneranno positivi (senza che però ciascuno riprenda il suo valore), e in generale un numero pari di permutazioni effettuate sopra due indici cambierà i termini positivi tra loro, e un numero dispari di permutazioni trasformerà i termini positivi in negativi e viceversa.

Dunque nell'espressione Δ vi saranno tutti i termini che corrispondono a una permutazione qualunque degl'indici inferiori nel prodotto (2), e se vogliamo sapere se due termini hanno segno eguale od opposto, basta contare il numero delle permutazioni d'indici inferiori necessarie per passare dall'uno all'altro; se è pari hanno segno eguale, se dispari hanno segno opposto. Così rimane dimostrata la regola di formazione enunciata.

Esempio. Per formare il determinante

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

prendo il prodotto

$$a_1^1 \; a_2^2 \; a_3^3,$$

ed ottengo il polinomio

$$a_1{}^1a_2{}^2a_3{}^3-a_1{}^1a_3{}^2a_2{}^3+a_2{}^1a_3{}^2a_1{}^3-a_2{}^1a_1{}^2a_3{}^3+a_3{}^1a_1{}^2a_2{}^3-a_3{}^1a_2{}^2a_1{}^3,$$

deducendo ogni termine dal precedente colla permutazione di due indici inferiori e cambiando il segno.

311*. Osservazione. Il termine generale d'un determinante è dato tanto dall' espressione (1) quanto dalla (2), e quindi tutti i termini di esso si deducono dal prodotto

$$a_1{}^1\, a_2{}^2\, a_3{}^3 \ldots . a_n{}^n,$$

tanto permutando tra loro gl' indici inferiori e lasciando fermi i superiori, quanto permutando i superiori e lasciando fermi gl' inferiori; e l' indice inferiore di un elemento indica la colonna, l' indice superiore la linea alla quale esso appartiene; dunque *un determinante non muterà valore cambiando le linee in colonne, e le colonne in linee, e quello che si dimostra per le colonne vale anche per le linee e viceversa.*

Esempio. Sarà un' identità

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

Espressione di un determinante per determinanti di ordine inferiore.

312*. Un determinante si può sempre esprimere per mezzo di determinanti, l' ordine dei quali è inferiore di un' unità.

Infatti; in ogni termine del prodotto P comparisce (310*) una delle quantità $a_1, a_2, \ldots . a_n$, ed una soltanto, inalzata al primo grado; onde riunendo i termini

che contengono un medesimo elemento inalzato al primo grado, avremo

$$(1)\quad \Delta = A_1^1 a_1^1 + A_2^1 a_2^1 + A_3^1 a_3^1 + \ldots + A_n^1 a_n^1,$$

dove A_1^1 non conterrà a_1, A_2^1 non conterrà $a_2, \ldots A_n^1$ non conterrà a_n.

Per determinare A_i^1 osserviamo che esso risulta in P (305') dal coefficiente di a_i^1, cioè da

$$(2)\quad \begin{aligned} & a_1 a_2 a_3 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_n (a_2 - a_1) \ldots \\ & \ldots (a_{i-1} - a_1)(a_{i+1} - a_1)(a_n - a_1)(a_3 - a_2) \ldots (a_{i-1} - a_2)(a_{i+1} - a_2) \ldots \\ & \ldots (a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1})(-a_1)(-a_2) \ldots (-a_{i-1}) a_{i+1} \ldots a_n \\ & = \pm a_1^2 a_2^2 a_3^2 \ldots a_{i-1}^2 a_{i+1}^2 \ldots a_n^2 (a_2 - a_1) \ldots \\ & \ldots (a_{i-1} - a_1)(a_{i+1} - a_1) \ldots (a_n - a_1) \ldots (a_n - a_{n-1}), \end{aligned}$$

che è eguale al prodotto

$$(3)\quad \begin{aligned} & a_1 a_2 a_3 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_n (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots \\ & \ldots (a_{i-1} - a_1)(a_{i+1} - a_1) \ldots (a_n - a_{n-1}), \end{aligned}$$

moltiplicato per $\pm a_1 a_2 a_3 \ldots a_{i-1} a_{i+1} a_n$. Il prodotto (3), nel quale, per convertire P in Δ, si devono considerare gli esponenti come indici, è eguale (305') al determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \ldots \ldots a_{i-1}^1 & a_{i+1}^1 \ldots \ldots a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \ldots \ldots a_{i-1}^2 & a_{i+1}^2 \ldots \ldots a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} \ldots a_{i-1}^{n-1} & a_{i+1}^{n-1} \ldots a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

e quindi può ottenersi il prodotto di esso con $\pm a_1 a_2 a_3 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_n$, (309') moltiplicandone tutti gli elementi della prima colonna per a_1, quelli della seconda per $a_2, \ldots$

quelli dell'ultima per a_n; onde A_i^1 prende la forma:

$$\pm\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \dots a_{i-1}^2 & a_{i+1}^2 \dots a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \dots a_{i-1}^3 & a_{i+1}^3 \dots a_n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & a_3^n \dots a_{i-1}^n & a_{i+1}^n \dots a_n^n \end{vmatrix}$$

dove bisognerà prendere il segno + o il segno — secondo che è pari o dispari il numero degli $i-1$ fattori negativi nel prodotto (2), cioè secondo che i è dispari o pari.

Dunque A_i^1 è il determinante che si ottiene, tralasciando in Δ la prima linea e la i^{esima} colonna, preso col segno + se i è dispari, col segno — se i è pari.

Esempio. Il determinante di 4° ordine

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}$$

sarà eguale ad

$$a\begin{vmatrix} b' & c' & d' \\ b'' & c'' & d'' \\ b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a' & c' & d' \\ a'' & c'' & d'' \\ a''' & c''' & d''' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \\ a''' & d''' & b''' \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix}$$

313*. Osservazione I. Quello che abbiamo detto rispetto agli elementi della prima linea vale per tutte le altre, perchè le linee si possono (306*) permutare tra loro senza cangiare il valore assoluto del determinante; dunque chiamando $A_1^i\ A_2^i \dots\ A_n^i$ i coefficienti rispettivi di $a_1^i,\ a_2^i, \dots\ a_n^i$, saranno anch'essi determinanti di ordine $n-1$, e avremo

$$\Delta = A_1^i a_1^i + A_2^i a_2^i + \dots + A_n^i a_n^i.$$

314*. OSSERVAZIONE II. Poichè in un determinante si possono (311*) mutare le linee in colonne e le colonne in linee, o gl'indici inferiori in superiori e viceversa senza cambiarne il valore, avremo anche

$$\Delta = A_i^1 a_i^1 + A_i^2 a_i^2 + \ldots + A_i^n a_i^n.$$

315*. I determinanti di ordine $n-1$, $A_1^1 A_1^2 \ldots A_2^1 A_2^2 \ldots$, si dice che sono rispettivamente *elementi reciproci* di a_1^1, $a_2^1, \ldots a_1^2, a_2^2 \ldots$

Relazioni tra gli elementi di un determinante e i loro elementi reciproci.

316*. Tra gli elementi di un determinante e i loro elementi reciproci esistono relazioni molto importanti.

Poichè un determinante si annulla (308*), ponendo rispettivamente eguali gli elementi di una colonna a quelli di un'altra, se nella equazione del numero (314*) sostituiamo successivamente $a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, a_{i+1} \ldots a_n$ ad a_i, i primi membri dell'equazioni che otterremo si annulleranno, e avremo

$$\begin{array}{l}
0 = A^1_i a^1_1 + A^2_i a^2_1 + \ldots + A^n_i a^n_1, \\
0 = A^1_i a^1_2 + A^2_i a^2_2 + \ldots + A^n_i a^n_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 = A^1_i a^1_{i-1} + A^2_i a^2_{i-1} + \ldots + A^n_i a^n_{i-1}, \\
0 = A^1_i a^1_{i+1} + A^2_i a^2_{i+1} + \ldots + A^n_i a^n_{i+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 = A^1_i a^1_n + A^2_i a^2_n + \ldots + A^n_i a^n_n.
\end{array}$$

317*. Poichè un determinante si annulla anche ponendo rispettivamente eguali gli elementi di due linee,

perchè quel che vale per le colonne vale anche per le linee (311*); il primo membro dell'equazione del numero (313*) si annullerà sostituendo successivamente $a^1, a^2, \ldots . a^{i-1}, a^{i+1}, \ldots . a^n$ ad a^i e avremo

$$
\begin{array}{l}
0 = A_1^i a_1^1 + A_2^i a_2^1 + \ldots . + A_n^i a_n^1, \\
0 = A_1^i a_1^2 + A_2^i a_2^2 + \ldots . + A_n^i a_n^2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 = A_1^i a_1^{i-1} + A_2^i a_2^{i-1} + \ldots . + A_n^i a_n^{i-1}, \\
0 = A_1^i a_1^{i+1} + A_2^i a_2^{i+1} + \ldots . + A_n^i a_n^{i+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 = A_1^i a_1^n + A_2^i a_2^n + \ldots . + A_n^i a_n^n.
\end{array}
$$

Addizione di determinanti.

318*. Si può qualche volta sostituire un solo determinante alla somma di due determinanti.

TEOREMA. *La somma di due determinanti che hanno eguali* n—1 *colonne è un determinante che ha queste* n—1 *colonne, e per elementi della* n^{esima} *colonna le somme degli elementi corrispondenti dei due determinanti dati.*

Infatti, sieno i due determinanti

$$
P = \begin{vmatrix}
a^1_1\, a^1_2 \ldots a^1_{i-1}\, a^1_i \ldots a^1_n \\
a^2_1\, a^2_2 \ldots a^2_{i-1}\, a^2_i \ldots a^2_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a^n_1\, a^n_2 \ldots a^n_{i-1}\, a^n_i \ldots a^n_n
\end{vmatrix},\quad
Q = \begin{vmatrix}
a^1_1\, a^1_2 \ldots a^1_{i-1}\, b_1\, a^1_{i+1} \ldots a^1_n \\
a^2_1\, a^2_2 \ldots a^2_{i-1}\, b_2\, a^2_{i+1} \ldots a^2_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a^n_1\, a^n_2 \ldots a^n_{i-1}\, b_n\, a^n_{i+1} \ldots a^n_n
\end{vmatrix}
$$

avremo (314*)

$$
\begin{array}{l}
P = A_i^1 a_i^1 + A_i^2 a_i^2 + \ldots . + A_i^n a_i^n, \\
Q = A_i^1 b_1 + A_i^2 b_2 + \ldots . + A_i^n b_n;
\end{array}
$$

onde

$$P+Q=A_i^1(a_i^1+b_1)+A_i^2(a_i^2+b_2)+\ldots\ldots+A_i^n(a_i^n+b_n)$$

$$=\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \ldots\ldots a^1_{i-1} & a^1_i+b_1 \ldots\ldots a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 \ldots\ldots a^2_{i-1} & a^2_i+b_2 \ldots\ldots a^2_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a^n_1 & a^n_2 \ldots\ldots a^n_{i-1} & a^n_i+b_n \ldots\ldots a^n_n \end{vmatrix}$$

319*. Osservazione. Se poniamo $b_1=a_t^1\,m$, $b_2=a_t^2\,m, \ldots\ldots b_n=a^n_t\,m$, e t differente da i, Q diviene eguale a zero; poichè diviso per m (309*) avrà due colonne eguali (308*); dunque *un determinante non muta valore se agli elementi di una colonna si aggiungono gli elementi corrispondenti di un' altra colonna, moltiplicati per un medesimo fattore.*

Esempio. Si debba calcolare il determinante

$$P=\begin{vmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 7 \\ 10 & 4 & 11 \end{vmatrix}$$

Aggiungendo agli elementi della prima colonna quelli della seconda moltiplicati per -2, avremo

$$P=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 11 \end{vmatrix}$$

Aggiungendo agli elementi della terza colonna quelli della seconda moltiplicati per -1, avremo

$$P=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

Aggiungendo agli elementi della terza colonna quelli della prima moltiplicati per -1, verrà finalmente

$$P=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=-55.$$

NOTA III*.

SOPRA LA RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONI DI PRIMO GRADO CON PIÙ INCOGNITE.

320*. Sia un sistema di n equazioni con n incognite:

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l} a_1^1\, x_1 + a^1_2\, x_2 + a^1_3 x_3 + \ldots\ldots + a^1_n\, x_n = k_1, \\ a_1^2\, x_1 + a^2_2\, x_2 + a^2_3 x_3 + \ldots\ldots + a^2_n\, x_n = k_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^n\, x_1 + a^n_2\, x_2 + a^n_3 x_3 + \ldots\ldots + a^n_n\, x_n = k_n, \end{array}\right.$$

dove, come nella Nota precedente, gli esponenti non indicano potenze, ma sono indici che distinguono tra loro i coefficienti delle differenti equazioni.

Formiamo con i coefficienti dell' equazioni (1) il determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1^1\ a_2^1\ a_3^1 \ldots\ldots a^1_n \\ a_1^2\ a_2^2\ a_3^2 \ldots\ldots a^2_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^n\ a_2^n\ a_3^n \ldots\ldots a^n_n \end{vmatrix}$$

e moltiplichiamo rispettivamente l'equazioni proposte per gli elementi reciproci dei coefficienti di x_i, che (312°) abbiamo rappresentati con A^1_i, A^2_i, $A^3_i \dots A^n_i$; e sommiamole. Se poniamo mente alle equazioni dei numeri (314°) e (316°), avremo

$$(2) \qquad \Delta x_i = k_1 A_i^1 + k_2 A_i^2 + \dots + k_n A_i^n,$$

o anche

$$(3) \quad x_i \times \begin{vmatrix} a^1_1\, a^1_2\, a^1_3 \dots a^1_n \\ a^2_1\, a^2_2\, a^2_3 \dots a^2_n \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a^n_1\, a^n_2\, a^n_3 \dots a^n_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1_1\, a^1_2 \dots a^1_{i-1}\, k_1\, a^1_{i+1} \dots a^1_n \\ a^2_1\, a^2_2 \dots a^2_{i-1}\, k_2\, a^2_{i+1} \dots a^2_n \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a^n_1\, a^n_2 \dots a^n_{i-1}\, k_n\, a^n_{i+1} \dots a^n_n \end{vmatrix}$$

Da questa formula (3) si deduce che i valori delle incognite sono dati da frazioni che hanno il denominatore eguale a un medesimo determinante, e i numeratori derivati dal denominatore comune, sostituendovi rispettivamente i termini tutti cogniti ai coefficienti dell'incognita che esprimono.

Discussione delle formule di risoluzione.

321°. Se il denominatore comune Δ è differente da zero, dando a i successivamente i valori $1, 2, 3 \dots n$, si ottengono senza difficoltà i valori delle n incognite dalla formula (2) che può scriversi:

$$(1) \qquad x_i = \frac{k_1 A_i^1 + k_2 A_i^2 + \dots + k_n A_i^n}{\Delta};$$

ma se $\Delta = 0$, si presentano come nel caso di due o tre incognite (Cap. VI) espressioni senza significato, e bisogna determinare che cosa allora si possa dedurne

relativamente ai loro valori. Considereremo due casi:

1°. Sia

$$(2)\qquad \begin{aligned}\Delta &= a^1_i A^1_i + a^2_i A^2_i + \dots + a^n_i A^n_i \\ &= a_1^i A^i_1 + a^i_2 A^i_2 + \dots + a^i_n A^i_n = 0,\end{aligned}$$

e tutti i numeratori dei valori delle incognite non siano eguali a zero; allora alcune incognite si presentano sotto la forma priva di significato $\frac{m}{0}$.

Supponiamo differente da zero il numeratore del valore dell'incognita x_i. Moltiplichiamo la 1ª, la 2ª, ... la $(i-1)^{esima}$, la $(i+1)^{esima}$, ... la n^{esima} dell'equazioni proposte (320') rispettivamente per A^1_i, A^2_i, A^3_i .... A_i^{i-1}, A_i^{i+1} .... A_i^n, e sommiamole; avremo

$$\begin{aligned}&(A_i^1 a_1^1 + A_i^2 a_1^2 + \dots A_i^{i-1} a_1^{i-1} \\ &\quad + A_i^{i+1} a_1^{i+1} + \dots + A_i^n a_1^n) x_1 \\ &\quad + (A_i^1 a_2^1 + A_i^2 a_2^2 + \dots + A_i^{i-1} a_2^{i-1} \\ &\quad + A_i^{i+1} a_2^{i+1} + \dots + A_i^n a_2^n) x_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad + (A_i^1 a_i^1 + A_i^2 a_i^2 + \dots + A_i^{i-1} a_i^{i-1} \\ &\quad + A_i^{i+1} a_i^{i+1} \dots + A_i^n a_i^n) x_i \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad + (A_i^1 a_n^1 + A_i^2 a_n^2 + \dots A_i^{i-1} a_n^{i-1} \\ &\quad + A_i^{i+1} a_n^{i+1} + \dots + A_i^n a_n^n) x_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\quad = k_1 A_i^1 + k_2 A_i^2 + \dots k_{i-1} A_i^{i-1} \\ &\qquad + k_{i+1} A_i^{i+1} + \dots k_n A_i^n.\end{aligned}$$

Riducendo coll'equazioni del numero (316') e colla equazione (2), si ottiene

$$(3)\qquad \begin{aligned}&-A^i_i(a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + \dots + a^i_n x_n) \\ &= k_1 A_i^1 + k_2 A_i^2 + \dots + k_{i-1} A_i^{i-1} \\ &\qquad + k_{i+1} A_i^{i+1} + \dots + k_n A_i^n.\end{aligned}$$

Ora, confrontando tra loro la i^{esima} dell'equazioni proposte (320*) con questa, si ricava

$$k_1 A_i^1 + k_2 A_i^2 + \ldots + k_{i-1} A_i^{i-1} + k_{i+1} A_i^{i+1} + \ldots$$
$$\ldots + k_n A_i^n = -A_i^i k^i,$$

ossia

$$(4) \qquad k_1 A_i^1 + k_2 A_i^2 + \ldots + k_n A_i^n = 0,$$

cioè il numeratore del valore di x_i nullo contro il supposto; dunque se tutti i numeratori non sono nulli, $n-1$ equazioni sono incompatibili coll'altra equazione; quindi $\frac{m}{0}$ indica la non esistenza di valori che possano sodisfare tutte le equazioni.

322*. 2°. Se, oltre il denominatore, tutti i numeratori sono nulli, le incognite si presentano tutte sotto la forma di $\frac{0}{0}$. In questo caso, poichè l'equazione (4) è verificata, qualunque sia i, l'equazione (3) che è conseguenza di $n-1$ dell'equazioni proposte (320*) non differisce dall' i^{esima} di queste, altro che per un fattore A_i^i che moltiplica tutti i suoi termini; dunque una qualunque dell'equazioni (1) è conseguenza delle altre, e quindi l'equazioni veramente distinte sono $n-1$; e dando un valore qualunque ad un'incognita, in generale si otterranno valori determinati per le altre, e il sistema dell'equazioni proposte avrà un numero infinito di soluzioni.

323*. È da osservarsi che quando sono eguali a zero il denominatore e un numeratore, in generale sono eguali a zero anche tutti gli altri numeratori. Infatti, poniamo:

$$k_1 A_1^1 + k_2 A_1^2 + \ldots + k_n A_1^n = N_1,$$

$$k_1A_2^1+k_2A_2^2+\ldots+k_nA_2^n=N_2,$$

$$\begin{array}{ccccc} . & . & \ldots & . & . \\ . & . & \ldots & . & . \end{array}$$

$$k_1A_n^1+k_2A_n^2+\ldots+k_nA_n^n=N_n.$$

Moltiplicando la prima per a_1^1, la seconda per a_2^1, l'ultima per a_n^1, sommando e riducendo colle identità del numero (317*), abbiamo:

$$k_1\Delta=a_1^1N_1+a_2^1N_2+a_3^1N_3+\ldots+a_n^1N_n.$$

Analogamente si ottiene:

$$k_2\Delta=a_1^2N_1+a_2^2N_2+\ldots+a_n^2N_n,$$

$$\begin{array}{ccccc} . & . & . & \ldots & . \end{array}$$

$$k_n\Delta=a_1^nN_1+a_2^nN_2+\ldots+a_n^nN_n,$$

Quindi se $\Delta=o$, e $N_1=o$; avremo:

$$a_2^1N_2+a_3^1N_3+\ldots+a_n^1N_n=o,$$
$$a_2^2N_2+a_3^2N_3+\ldots+a_n^2N_n=o,$$

$$\begin{array}{cccc} . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \end{array}$$

$$a_2^nN_2+a_3^nN_3+\ldots+a_n^nN_n=o.$$

Onde si deduce facilmente:

$$A'_1N_2=o,\ A_1^2N_2=o,\ \ldots.\ A_1^nN_2=o,$$
$$A'_1N_3=o,\ A_1^2N_3=o,\ \ldots.\ A_1^nN_3=o,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$N_2=o\ \ N_3=o\ \ldots N_n=o,$$

fuori che nel caso in cui siano contemporaneamente

$$A_1^1=o,\ A_1^2=o,\ \ldots A_1^n=o;$$

come volevamo dimostrare.

324*. Vi sarebbero da considerare i casi in cui fossero eguali a zero alcuni dei coefficienti, o delle quantità $A_1^1, A_1^2 \dots A_2^1 \dots$ poichè allora i ragionamenti che abbiamo fatti sono in difetto; ma li lasceremo discutere alla diligenza dei lettori.

Ricapitolando; quando le incognite si presentano sotto la forma $\frac{m}{0}$, l'equazioni sono incompatibili; quando si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$ una di esse è conseguenza dell'altre.

325*. Dall'equazione (2) del numero (320*) si ricava che se non sono nulle tutte le incognite, e sono eguali a zero tutti i secondi membri dell'equazioni (1), deve aversi $\Delta = 0$; allora l'equazioni si riducono a $n-1$, perchè le incognite si presentano sotto la forma $\frac{0}{0}$ e un equazione è conseguenza dell'altre, e quindi il problema è indeterminato; ma riguardando come incogniti i rapporti delle $n-1$ incognite a una di esse, per esempio $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n} \dots \frac{x_{n-1}}{x_n}$, se ne potranno determinare i valori.

Condizione perchè possano coesistere n equazioni con $n-1$ incognite.

326*. Perchè possano coesistere n equazioni con $n-1$ incognite è chiaro che sarà necessario e sufficiente che i valori dell'incognite ricavati da $n-1$ qualunque di queste equazioni sostituiti nella n^{esima} la rendano identica, ossia che eliminando le $n-1$ incognite si ottenga un'identità. Ora questa identità si esprime per mezzo di un determinante.

Infatti, siano le n equazioni:

$$(1)\quad \begin{cases} a^1_1 x_1 + a^1_2 x_2 + \ldots + a^1_{n-1} x_{n-1} + a^1_n = 0, \\ a_1^2 x_2 + a^2_2 x_2 + \ldots + a^2_{n-1} x_{n-1} + a^2_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^n x_1 + a^n_2 x_2 + \ldots + a^n_{n-1} x_{n-1} + a^n_n = 0. \end{cases}$$

Formiamo il determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \ldots a^1_n \\ a_1^2 & a_2^2 \ldots a^2_n \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ a_1^n & a_2^n \ldots a^n_n \end{vmatrix}$$

e moltiplichiamo l'equazioni (1) rispettivamente per gli elementi reciproci di $a^1_n, a^2_n \ldots a^n_n$, che abbiamo rappresentati con $A^1_n, A^2_n, \ldots A^n_n$ (315*), e sommiamole; avremo, ponendo mente alle identità del numero (316*)

$$A^1_n a^1_n + A^2_n a^2_n + \ldots A^n_n a^n_n = \begin{vmatrix} a^1_1 a^1_2 \ldots a^1_n \\ a^2_1 a^2_2 \ldots a^2_n \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ a^n_1 a^n_2 \ldots a^n_n \end{vmatrix} = 0,$$

e questa equazione esprimerà la condizione, perchè le n equazioni possano coesistere.

NOTA IV.

—

Risoluzione dell'equazione $ax^2+bx+c=o$, quando a è piccolissimo.

327. La formula generale che dà le radici dell' equazione $ax^2+bx+c=0$,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

non è accomodata al calcolo numerico, quando il coefficiente a è molto piccolo. Infatti, dopo aver calcolato approssimativamente $\sqrt{b^2-4ac}$, bisogna dividere il risultato per $2a$, e quindi l'errore commesso resta diviso contemporaneamente per un numero molto piccolo, e per ciò rimane grandemente aumentato. Converrà dunque trovarne un'altra meglio appropriata a questo caso. Consideriamo soltanto la radice che differisce poco da $-\frac{c}{b}$ (100); l'altra si troverà dopo facilmente, poichè la somma di ambedue è conosciuta, è eguale a $-\frac{b}{a}$.

Dall' equazione

$$ax^2+bx+c=0,$$

si deduce

$$(1) \qquad x=-\frac{c}{b}-\frac{ax^2}{b},$$

e poichè a è molto piccolo, trascurando $\frac{ax^2}{b}$, avremo

una *prima approssimazione*

$$x = -\frac{c}{b}. \tag{2}$$

L' errore commesso, prendendo questo valore, è $\frac{ax^2}{b}$ e contiene come fattore la prima potenza di a, e perciò si dice di *prim' ordine.*

Se indichiamo con α_1 l'errore che si commette prendendo $x = -\frac{c}{b}$, avremo esattamente

$$x = -\frac{c}{b} + \alpha_1; \tag{3}$$

Ponendo nuovamente questo valore nel secondo membro dell' equazione (1), abbiamo

$$\begin{aligned} x &= -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b} + \alpha_1\right)^2 \\ &= -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} + \frac{2ac\alpha_1}{b^2} - \frac{a\alpha_1^2}{b}. \end{aligned} \tag{4}$$

Se trascuriamo nel secondo membro dell' equazione (4) i termini che hanno per fattori $a\alpha_1$, $a\alpha_1^2$, resta per *seconda approssimazione*

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}. \tag{5}$$

Poichè α_1 è di prim' ordine rispetto ad a, $a\alpha_1$ ed $a\alpha_1^2$ saranno rispettivamente di secondo e terz' ordine, cioè conterranno per fattori a^2 ed a^3. Dunque la seconda approssimazione data dalla formula (5) non ammette altro che errori di *second' ordine*, e quindi se poniamo

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} + \alpha_2, \tag{6}$$

α_2 sarà di second'ordine, cioè la sua espressione conterrà a^2 per fattore.

Se mettiamo nuovamente nel secondo membro della formula (1) il valore di x dato dalla formula (6) si ottiene

$$(7) \qquad x = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} + \alpha_2\right)^2$$
$$= -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{a^3c^4}{b^7} + 2\alpha_2 \frac{a}{b}\left(\frac{c}{b} + \frac{ac^2}{b^3}\right) - \alpha_2^2 \frac{a}{b}.$$

Poichè α_2 è di second'ordine, $\alpha_2 a$ e $\alpha_2^2 a$ saranno rispettivamente di terzo e di quint'ordine. Trascurando i termini che contengono $\alpha_2 a$ e $\alpha_2^2 a$, e $\frac{a^3c^4}{b^7}$ che è pure di terz'ordine, otterremo per *terza approssimazione*

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5}.$$

Potremo continuare così indefinitamente.

328. Osservazione. Le formule di approssimazione

$$x = -\frac{c}{b},$$
$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3},$$
$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5},$$

sodisfanno alle condizioni che richiede un buon sistema di approssimazioni successive.

1°. Ciascuna si ottiene dalla precedente, mediante l'addizione di un termine di correzione:

2°. L'errore commesso dopo l'addizione di ciascun termine è *piccolissimo* rispetto a questo termine.

Infatti, prendendo $x=-\frac{c}{b}$, l'errore commesso ha per fattore a, e quindi è piccolissimo rispetto a $-\frac{c}{b}$.

Ponendo $x=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}$, l'errore commesso ha per fattore a^2 e quindi è piccolissimo rispetto ad $\frac{ac^2}{b^3}$, e così di seguito.

Da questo ne segue che, per distinguere se il valore ottenuto è maggiore o minore del valore esatto, basterà esaminare il segno del termine di correzione che si avrebbe spingendo più avanti l'approssimazione.

Sia, per esempio, l'equazione

$$0{,}000047x^2+6724x-334=0,$$

abbiamo

$$a=\frac{47}{10^6},\quad b=6724,\quad c=-334,$$

onde

$$\frac{c}{b}=-\frac{334}{6724}<\frac{1}{10},$$

ed è facile a vedersi che il 1° termine di x è $<\frac{1}{10}$,

il 2° » $<\frac{1}{10^{10}}$,

il 3° » $<\frac{1}{10^{19}}$,

il 4° » $<\frac{1}{10^{28}}$,

ec.

e per risolvere l'equazione con 20 cifre decimali esatte, basterà calcolare tre soli termini di x, ed anche il terzo termine non avrà influenza altro che sull'ultima cifra.

Avremo dunque

$$\begin{array}{lcll}
-\dfrac{c}{b} = & \dfrac{334}{6724} = 0,04967281380130874479 & 5 \\
-\dfrac{ac^2}{b^3} = - & \dfrac{47\,.\,334^2}{6724^3\,.\,10^6} = - \qquad 1724676624 & 8 \\
-\dfrac{2a^2c^3}{b^5} = & \dfrac{2\,.\,47^2\,.\,334^3}{6724^5\,.\,10^{12}} = \qquad\qquad 1 & 2 \\
\hline
& x' = 0,04967281378406197856, & -
\end{array}$$

e poichè

$$-\frac{a}{b} = -\frac{6724.10^6}{47} = -143063829,78723404255319148936 17,$$

sarà

$$x'' = -\frac{b}{a} - x' = -143063829,83690685633725346792,$$

valori esatti fino a 20 decimali.

Avremmo potuto ottenere direttamente i medesimi valori per x' e x'', calcolando la formula generale (89).

Colla divisione si ha primieramente

$$\frac{b}{2a} = \frac{6724\,.\,10^6}{94} = 71531914,89361702127659574468,$$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 2 \times 22606088031396\,; \\ &= 2 \times 4754586^2, \end{aligned}$$

ma

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168 87\,;$$

dunque

$$4754586\,.\,\sqrt{2} = 6724000,00466924449570182598.$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac} &= \frac{10^6}{94} \times 4754586\,.\,\sqrt{2} \\ &= 71531914,94328983506065772324. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque

$$-\frac{b}{2a}=-\ 71531914{,}89361702127659574468,$$

$$\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}=\ 71531914{,}94328983506065772324,$$

e

$$x'=-\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}=\ 0{,}04967281378406197856,$$

$$x''=-\frac{b}{2a}-\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}=-\ 143063829{,}83690685633725346792.$$

329. Nel problema 1° del numero (101) abbiamo l'equazione

$$\frac{x^2}{v^2}-x\left(\frac{2t}{v}+\frac{2}{g}\right)+t^2=0,$$

dove v rappresenta la velocità del suono, che è eguale circa a 333, e quindi il quadrato di v è un numero assai grande, e $\frac{1}{v^2}$ coefficiente di x è molto piccolo. Dunque per calcolare le radici torna comodo applicare le formole che abbiamo date in questa Nota.

Se applichiamo la prima formula, troviamo

$$(a) \qquad x=\frac{t^2}{\frac{2}{g}+\frac{2t}{v}},$$

e questa in generale sarà sufficiente, perchè si possono trascurare le quantità dell' ordine $\frac{1}{v^2}$ ($\frac{1}{100000}$ circa, e l' unità di lunghezza è il metro).

La formula (a) può rendersi anche più semplice osservando che $\frac{2t}{v}$ è piccolo, in modo che, trascurandolo

in una prima approssimazione, si può scrivere:

$$x=\frac{gt^2}{2},$$

formula che corrisponde all'ipotesi che la propagazione del suono sia istantanea. Per ottenere un termine di correzione, poniamo

$$x=\frac{gt^2}{2}+\alpha.$$

Per determinare α, avremo

$$\frac{t^2}{\frac{2}{g}+\frac{2t}{v}}=\frac{gt^2}{2}+\alpha,$$

onde

$$0=\frac{2\alpha}{g}+\frac{gt^3}{v}+\frac{2t\alpha}{v}.$$

Trascurando $\frac{2t\alpha}{v}$ che è piccolo a cagione del fattore $\frac{1}{v}$, si ricava

$$\alpha=-\frac{g^2t^3}{2v},$$

e si ha finalmente per valore approssimato di x,

$$x=\frac{gt^2}{2}-\frac{g^2t^3}{2v}.$$

330'. Osservazione. La radice maggiore, che si ottiene sottraendo il valore trovato della più piccola dal coefficiente del secondo termine dell'equazione preso con segno contrario, corrisponde al seguente problema:

Calcolare l'altezza da cui è caduto un corpo, sapendo che sono trascorsi t *secondi dal momento in cui*

è arrivato in terra, e il momento in cui si è sentito un suono prodotto quando ha incominciato a cadere.

Infatti, l'equazione di questo problema è la seguente:

$$t-\frac{x}{v}=-\sqrt{\frac{2x}{g}},$$

che è quella verificata dalla radice maggiore (101).

NOTA V*.

SOPRA LA RISOLUZIONE IN NUMERI INTERI DELL' EQUAZIONE $ax+by=K$.

—

331*. Ai metodi esposti nel Capitolo XX, per trovare le soluzioni in numeri interi dell' equazione

$$ax+by=K,$$

mi pare che debba aggiungersi il seguente assai semplice ed elegante, che riduce questo problema a quello fondamentale dell' aritmetica, cioè alla riduzione di un numero nei suoi fattori primi. Per dimostrare questo metodo, bisogna premettere due proposizioni della *teorica dei numeri*.

332*. Teorema 1°. *Il numero* n, *che esprime quanti sono i numeri inferiori ad* N *e primi con* N, *è dato dalla formula*

$$n=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)....,$$

se a, b, c,.... *sono tutti i fattori primi differenti che dividono* N.

Infatti, prendiamo le seguenti serie di numeri:

(1) $1, 2, 3, \ldots N-1, N;$

(2) $a, 2a, 3a, \ldots \frac{N}{a}a; b, 2b, 3b, \ldots \frac{N}{b}b; c, 2c, 3c, \ldots \frac{N}{c}c; \ldots$

(3) $ab, 2ab, 3ab, \ldots \frac{N}{ab}ab; ac, ac, 3ac, \ldots \frac{N}{ac}ac;$

$bc, 2bc, \ldots \frac{N}{bc}bc; \ldots$

(4) $abc, 2abc, 3abc, \ldots \frac{N}{abc}abc; \ldots$

. . . .

. . . .

Nella prima delle serie (2) compariscono soltanto i numeri inferiori ad N che hanno il fattore a comune con N; nella seconda soltanto quelli che hanno comune con N il fattore b ....; nella prima delle serie (3) quelli soltanto che hanno comuni con N i due fattori a e b, ... e così discorrendo; quindi è chiaro che un numero qualunque inferiore ad N, che ha p fattori primi differenti comuni con N (essendo p un numero qualunque), comparirà una volta nella serie (1), p volte nelle serie (2), tante volte quanti sono i prodotti differenti di p fattori due a due, cioè (161) $p\left(\frac{p-1}{2}\right)$ volte nelle serie (3), tante volte quanti sono i prodotti differenti di p fattori tre a tre, cioè (161) $p\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p-2}{3}\right)$ volte nelle serie (4) ...., una volta nelle serie p^{esime}. Dunque se dalla somma dei numeri che indicano quante volte questo numero è contenuto nelle serie di posto dispari si toglie la somma di quelli che indicano quante volte è contenuto nelle serie

di posto pari, avremo il numero

$$1-p+p\left(\frac{p-1}{2}\right)-p\left(\frac{p-1}{2}\right)\left(\frac{p-2}{3}\right)+\ldots\pm 1,$$

il quale è nullo, perchè si ottiene svolgendo colla formula del binomio (165) l' espressione identicamente nulla $(1-1)^m$.

Dunque se dalle serie (1), (3), (5) .... si tolgono i numeri delle serie (2), (4), (6)...., non restano altro che i numeri inferiori ad N che non hanno fattori primi comuni con N; ora i numeri della serie (1) sono N, quelli delle serie (2) sono $\frac{N}{a}+\frac{N}{b}+\frac{N}{c}\ldots\ldots$ quelli delle serie (3) sono $\frac{N}{ab}+\frac{N}{ac}+\frac{N}{bc}+\ldots\ldots$

Dunque il numero n dei numeri inferiori ad N e primi con N è

$$n=N-\left(\frac{N}{a}+\frac{N}{b}+\frac{N}{c}+\ldots\right)$$
$$+\left(\frac{N}{ab}+\frac{N}{bc}+\frac{N}{ac}+\ldots\right)-\ldots\pm\frac{N}{abc\ldots},$$

e quindi (164)

$$n=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots$$

333*. TEOREMA 2°. *Inalzando un numero qualunque inferiore a un numero* N *e primo con* N, *a una potenza indicata dal numero degl' interi inferiori ad* N, *e primi con* N, *e dividendo questa potenza per* N, *si ha per resto* 1.

Infatti, siano

(1) $$1, p_1, p_2, \ldots, N-1$$

i numeri inferiori ad N e primi con N; prendiamone uno qualunque x, e moltiplichiamolo per tutti gli altri; avremo i prodotti

(2) $$x, p_1 x, p_2 x, p_3 x, \dots, (N-1)x.$$

È chiaro che tutti questi prodotti divisi per N daranno resti primi con N. Poichè se avessimo

$$p_i x = qN + r,$$

e r avesse un fattore primo comune con N, questo fattore dovrebbe dividere $p_i x$ e quindi p_i od x contro il supposto. Di più questi resti saranno tutti differenti; perchè se due fossero eguali, e si avesse

$$p_i x = qN + r,$$
$$p_t x = q'N + r,$$

se ne ricaverebbe, sottraendo,

$$x(p_i - p_t) = (q - q')N,$$

e N primo con x dovrebbe dividere la differenza $p_i - p_t$ di due numeri minori di N.

Dunque i resti della divisione per N dei numeri della serie (2) saranno i medesimi numeri della serie (1), sebbene in ordine differente.

Ora, moltiplichiamo tra loro i numeri della serie (2); otterremo un prodotto

(3) $$x^n p_1 p_2 p_3 \dots (N-1),$$

il quale, per un teorema di aritmetica (*), sappiamo che diviso per N dà un resto eguale a quello del prodotto dei resti dei suoi fattori, che come abbiamo dimostrato sono i numeri stessi della serie (1); dunque i due prodotti (3) e

$$p_1 p_2 p_3 \dots (N-1)$$

(*) Vedi *Aritmetica di Bertrand*, n° 80*.

non potranno differire altro che per un multiplo di N, e in conseguenza avremo

$$x^n p_1 p_2 p_3 \ldots (N-1) = QN + p_1 p_2 p_3 \ldots (N-1),$$

e dividendo per $p_1 p_2 p_3 \ldots (N-1)$,

$$x^n = 1 + \frac{Q}{p_1 p_2 \ldots (N-1)} N;$$

e poichè il primo membro e la prima parte del secondo sono intere, dovrà essere intera anche la seconda, e quindi $p_1 p_2 \ldots (N-1)$ primo con N dovrà dividere Q; onde, chiamando M il quoziente, sarà

$$x^n = 1 + MN,$$

come volevamo dimostrare.

334*. Teorema 3°. *Tutte le soluzioni intere dell' equazione*

$$(1) \qquad ax - by = K$$

sono date dalle formule

$$(2) \qquad x = Ka^{n-1} + b\theta,$$

$$(3) \qquad y = K\frac{a^n - 1}{b} + a\theta,$$

dove θ *è un numero intero qualunque, e* n *indica il numero degl' interi minori di* b *e primi con* b.

Infatti l' equazione (1) dà

$$y = \frac{ax - K}{b},$$

e ponendo

$$x = Ka^{n-1},$$

si ha

$$y = K\frac{a^n - 1}{b},$$

e poichè a è primo con b, a^n-1 sarà (333*) divisibile per b, e quindi y risulterà intero.

Dunque $x=Ka^{n-1}$, $y=K\frac{a^n-1}{b}$ è una soluzione, e quindi le altre in numero infinito saranno date (243) dalle formule (2) e (3).

335*. Osservazione I. Invece di Ka^{n-1} si può prendere il prodotto dei resti delle divisioni di a^{n-1} e di K per b; perchè, per un teorema di aritmetica (*), questo prodotto moltiplicato per a e diviso per b darà un resto r eguale a quello che dà Ka^n diviso per b, cioè eguale a quello di K, e quindi

$$y=\frac{ra-K}{b}$$

risulterà intero.

336*. Osservazione II. Per avere le soluzioni dell'equazioni nelle quali i coefficienti dell' incognite hanno segni differenti da quelli che hanno nell'equazione (1), basta mutare i segni all'incognite in modo che tutti i termini acquistino i segni eguali a quelli dell' equazione (1); risolvere l'equazione ottenuta, e poi rimutare il segno ai valori trovati per le incognite alle quali il segno era stato mutato.

Esempio. Si debbano determinare le soluzioni intere dell' equazione

$$5x-12y=11.$$

Abbiamo

$$a=5,\quad b=12,\quad K=11;$$

poichè

$$b=2^2.3,$$

$$n=12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=4,$$

(*) Vedi *Aritmetica di Bertrand*, n° 80*.

sarà

$$Ka^{n-1}=5^3.11,$$

che diviso per 12 dà per resto 7. Quindi le soluzioni saranno date tutte dalle formule:

$$x=7+12\theta,$$
$$y=\frac{5.7-11}{12}+5\theta=2+5\theta.$$

NOTA VI*.

SOPRA I LIMITI.

337*. Se il valore di una quantità y dipende da quello di un'altra quantità x, che può variare a nostro arbitrio, e se è possibile far prendere ad x tali valori per i quali y si avvicini tanto a una quantità L da differirne meno di una qualunque quantità data piccola quanto si vuole, ed è impossibile dare ad x un valore per cui y divenga esattamente eguale ad L, si dice che L è il *limite* di y, e si scrive

$$L=\lim y,$$

indicando con l'iniziali *lim* la parola latina *limes*.

338*. Quando i valori di x per i quali y si avvicina ad L sono continuamente ed indefinitamente crescenti, e non esiste valore per quanto grande sia che renda $y=L$ (come nella formula

$$y=L+\frac{1}{x},$$

nella quale L è il limite verso cui converge y coll'aumentare di x), molte volte si dice che L è il valore di y per $x=\infty$.

Se coll'aumentare di x aumenta anche y, e può, per valori sufficientemente grandi di x, divenire maggiore di qualunque quantità data grande quanto si vuole, è chiaro che y non ha limite; ma si suol dire che ha per limite l'infinito, e si scrive

$$\lim y=\infty.$$

Per esempio, se

$$y=ax^2,$$

si dice che per $x=\infty$ si ha $y=\infty$.

339*. Abbiamo incontrata l'idea di limite in aritmetica nella teorica delle frazioni decimali (*). Per esempio, abbiamo veduto che l'espressione

$$0,111\ldots1=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots.+\frac{1}{10^n}$$

differisce da $\frac{1}{9}$ meno di $\frac{1}{10^n}$, e che si può prendere n così grande che questa differenza sia minore di una quantità qualunque piccola quanto si vuole, ma che non si potrà mai prendere n così grande che l'espressione proposta risulti eguale ad $\frac{1}{9}$; dunque

$$\frac{1}{9}=\lim\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots.+\frac{1}{10^n}\right),$$

cioè $\frac{1}{9}$ è il limite verso cui converge quella somma coll'aumentare di n.

(*) Vedi *Aritmetica di Bertrand*, n° 219.

Per determinare una quantità irrazionale abbiamo trovata una serie di numeri che si approssimano di più in più alla medesima, in modo che giungono a differirne meno di una qualunque quantità data, ma senza mai divenirle eguali con esattezza; e l'espressione generale di questi numeri, dei quali essa è limite, si ritiene come sufficiente a farcela compiutamente conoscere; per esempio, $\sqrt{10}$ è il limite (237) verso cui convergono le ridotte della frazione continua

$$3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\ldots}}$$

coll' aumentare il numero di ordine delle medesime, e si dice anche molte volte ch'è eguale a questa frazione continua.

340*. Ora passiamo a dimostrare che i risultati di operazioni algebriche effettuate sopra espressioni qualunque hanno per limiti i risultati che si otterrebbero effettuando le stesse operazioni sopra i limiti dell'espressioni medesime. Onde nel calcolo sarà indifferente operare sopra alcune espressioni, o sopra i loro limiti.

Consideriamo separatamente ciascuna operazione.

TEOREMA 1°. *Il limite di una somma di più espressioni algebriche è eguale alla somma dei limiti delle medesime.*

Sieno l'espressioni algebriche

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ldots.\ y_n$$

e

$$\lim y_1 = l_1,\quad \lim y_2 = l_2,\ldots.\ \lim y_n = l_n.$$

È chiaro che avremo

$$y_1 = l_1+\delta_1,\quad y_2 = l_2+\delta_2,\quad y_3 = l_3+\delta_3,\ldots.,$$
$$y_n = l_n+\delta_n,$$

dove $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ sono numeri positivi o negativi che possono rendersi piccoli quanto si vuole.

Sommando, otterremo

$$\begin{gathered} y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm \ldots \pm y_n \\ = l_1 \pm l_2 \pm l_3 \pm \ldots \pm l_n \pm \delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3 \pm \ldots \pm \delta_n. \end{gathered}$$

Ora supponiamo che δ_p si mantenga sempre maggiore e δ_q sempre minore degli altri numeri $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$; sarà

$$n\delta_p > \delta_1 \pm \delta_2 \pm \ldots \pm \delta_n > n\delta_q,$$

e poichè δ_p e δ_q e quindi anche $n\delta_p$ e $n\delta_q$ possono essere resi piccoli quanto si vuole, anche il numero che rimane sempre compreso tra i medesimi potrà essere reso piccolo a piacere, e quindi

$$\begin{gathered} \lim (y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm \ldots \pm y_n) = l_1 \pm l_2 \pm l_3 \pm \ldots \pm l_n \\ = \lim y_1 \pm \lim y_2 \pm \lim y_3 \pm \ldots \pm \lim y_n. \end{gathered}$$

341*. Teorema 2°. *Il limite del prodotto di più espressioni algebriche è eguale al prodotto dei limiti delle medesime.*

Servendosi delle denominazioni del numero precedente, avremo

$$y_1 y_2 y_3 \ldots y_n = (l_1 + \delta_1)(l_2 + \delta_2) \ldots (l_n + \delta_n),$$

e prendendo i logaritmi dei due membri di questa equazione,

$$\begin{gathered} \log (y_1 y_2 y_3 \ldots y_n) \\ = \log (l_1 + \delta_1) + \log (l_2 + \delta_2) + \ldots + \log (l_n + \delta_n) \\ = \log l_1 + \log l_2 + \log l_3 + \ldots + \log l_n + \varepsilon, \end{gathered}$$

dove ε evidentemente può rendersi piccolo quanto si

vuole, o anche

$$\log (y_1 y_2 y_3 \ldots . y_n) = \log (l_1 l_2 \ldots . l_n) + \epsilon,$$

e quindi chiamando a la base dei logaritmi,

$$a^{\log (y_1 y_2 \ldots y_n)} = a^{\log (l_1 l_2 l_3 \ldots l_n)} a^{\epsilon} = a^{\log (l_1 l_2 \ldots l_n)} + \delta,$$

dove δ è piccolo quanto si vuole, poichè col diminuire di ϵ, a^{ϵ} si avvicina all'unità. Onde

$$y_1 y_2 y_3 \ldots . y_n = l_1 l_2 \ldots . l_n + \delta,$$

e quindi

$$\lim (y_1 y_2 y_3 \ldots . y_n) = l_1 l_2 l_3 \ldots . l_n$$
$$= \lim y_1 \lim y_2 \lim y_3 \ldots . \lim y_n .$$

342*. TEOREMA 3°. *Il limite del quoziente di due espressioni algebriche è eguale al quoziente dei limiti del dividendo e del divisore.*

Sieno

$$l_1 = \lim y_1 , \quad l_2 = \lim y_2 ,$$

onde

$$y_1 = l_1 + \delta_1 , \quad y_2 = l_2 + \delta_2 ;$$

avremo

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{l_1 + \delta_1}{l_2 + \delta_2} = \frac{l_1}{l_2} + \frac{l_2 \delta_1 - l_1 \delta_2}{l_2 (l_2 + \delta_2)};$$

quindi

$$\lim \frac{y_1}{y_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{\lim y_1}{\lim y_2}.$$

343*. TEOREMA 4°. *Il limite di un' espressione algebrica che ha per esponente un' altra espressione algebrica, è eguale al limite della prima inalzato a una potenza eguale al limite della seconda.*

Sia al solito

$$l_1 = \lim y_1, \quad l_2 = \lim y_2,$$

ossia

$$y_1 = l_1 + \delta_1, \quad y_2 = l_2 + \delta_2;$$

avremo

$$y_1^{y_2} = (l_1 + \delta_1)^{l_2 + \delta_2},$$

$$\log y_1^{y_2} = (l_2 + \delta_2) \log (l_1 + \delta_1) = l_2 \log l_1 + \varepsilon,$$

dove ε sarà una quantità piccola quanto si vuole. Chiamando a la base dei logaritmi, sarà

$$y_1^{y_2} = a^{l_2 \log l_1} . a^{\varepsilon};$$

onde

$$\lim y_1^{y_2} = a^{l_2 \log l_1} = a^{\log l_1^{l_2}} = l_1^{l_2} = \lim y_1^{\lim y_2}.$$

Termineremo dimostrando un teorema molto importante per la determinazione dei limiti.

344*. Teorema 5°. *Se una quantità* y *rimane sempre compresa tra due altre* u *e* z, *e se i limiti di* z *ed* u *sono eguali a una stessa quantità* L, *anche il limite di* y *sarà eguale ad* L.

Infatti, se

$$u < y < z,$$

sarà

$$y = u + \rho (z - u),$$

essendo ρ una quantità minore di 1. Quindi (340*)

$$\lim y = \lim u + \rho (\lim z - \lim u),$$

e poichè

$$\lim z = \lim u = L,$$

sarà

$$\lim y = L.$$

345*. Esempio. Si voglia determinare il limite di

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\dots\dots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots\dots(\alpha+n-1)}$$

coll'aumentare di n, quando $\alpha > \beta$.

È nota (268) la diseguaglianza

$$(1+x)^k > 1+kx,$$

che è verificata qualunque sia x, se k è intero e positivo; dalla quale si deduce

$$\frac{1}{1+x} < \sqrt[k]{\frac{1}{1+kx}}.$$

Poniamo $x = \frac{\alpha-\beta}{m+\beta}$; avremo

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha-\beta}{\beta+m}} < \sqrt[k]{\frac{1}{1+k\frac{\alpha-\beta}{\beta+m}}},$$

ossia

$$\frac{\beta+m}{\alpha+m} < \sqrt[k]{\frac{\beta+m}{\beta+m+k(\alpha-\beta)}}.$$

Facendo $k \geq \frac{1}{\alpha-\beta}$, valore positivo perchè $\alpha > \beta$, avremo

$$\frac{\beta+m}{\alpha+m} < \sqrt[k]{\frac{\beta+m}{\beta+m+1}}.$$

Ponendo successivamente $m = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$, e moltiplicando membro a membro le diseguaglianze

ottenute, viene

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}<\sqrt[k]{\frac{\beta}{\beta+n}};$$

ma il primo membro di questa diseguaglianza è sempre evidentemente >0, onde

$$0<\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}<\sqrt[k]{\frac{\beta}{\beta+n}}$$

Ora col crescere di n si ha evidentemente

$$\lim\sqrt[k]{\frac{\beta}{\beta+n}}=0,$$

dunque (344*)

$$\lim\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}=0.$$

Definizione del numero e.

346*. L'espressione $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, quando m aumenta indefinitamente, converge verso un limite che è di molta importanza nell'Analisi, e che s' indica colla lettera e. Applichiamo i teoremi dimostrati di sopra alla determinazione di questo limite.

Supponiamo prima m intero; avremo (165)

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=1+m\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{m^2}$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{m^3}+\ldots.$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots.m}\frac{1}{m^m},$$

che si può scrivere anche nel modo seguente:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+1+\frac{\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}}{1.2}+\frac{\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-2}{m}}{1.2.3}+\dots$$
$$+\frac{\frac{m}{m}\ \frac{m-1}{m}+\frac{m-2}{m}\dots\frac{m-(m-1)}{m}}{1.2.3\dots m},$$

ossia

$$(1)\ \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}+\dots$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{1.2.3\dots m}$$

Ora, abbiamo evidentemente

$$1+1=1+1,$$
$$\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}<\frac{1}{1.2},$$
$$\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}<\frac{1}{1.2.3},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{1.2.3\dots m}<\frac{1}{1.2.3.m};$$

onde sommando membro a membro queste diseguaglianze, e ponendo mente all'equazione (1), si ricava

$$(2)\ \left(1+\frac{1}{m}\right)^m<1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\dots+\frac{1}{1.2.3\dots m}$$

Osserviamo anche le relazioni

$$1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2}=1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{1.2},$$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3}=\frac{1-\frac{1+2}{m}+\frac{2}{m^2}}{1.2.3}>\frac{1-\frac{1+2}{m}}{1.2.3},$$

$$\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)}{1.2.3.4}>\frac{1-\frac{1+2}{m}}{1.2.3}\cdot\frac{1-\frac{3}{m}}{4}$$

$$>\frac{1-\frac{1+2+3}{m}}{1.2.3.4},$$

. . . .

$$\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)....\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{1.2.3....m}$$

$$>\frac{1-\frac{1+2+3+....+(m-2)}{m}}{1.2.3....(m-1)}\cdot\frac{1-\frac{m-1}{m}}{m}$$

$$>\frac{1-\frac{1+2+3+....+m-1}{m}}{1.2.3....(m-1)m}.$$

Sommando i primi e gli ultimi membri di queste diseguaglianze, e osservando che la somma dei primi membri è eguale ad $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, abbiamo

$$(3)\quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m>1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+....+\frac{1}{1.2.3....m}$$

$$-\frac{1}{m}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1+2}{1.2.3}+\frac{1+2+3}{1.2.3.4}+....+\frac{1+2+3+....+(m-1)}{1.2.3....m}\right);$$

ma, come è noto dall' aritmetica (*),

$$1+2+3+\ldots.+(r-1)=\frac{r(r-1)}{2};$$

onde

$$\frac{1+2+3+\ldots.+(r-1)}{1.2.3\ldots.r}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots.(r-2)};$$

dunque alla diseguaglianza (3), sottraendo dalla parte minore

$$\frac{1}{2m}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots.(m-1)}+\frac{1}{2m}\cdot\frac{1}{1.2.3\ldots.m},$$

può darsi la forma

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m>1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots.+\frac{1}{1.2.3\ldots.m}$$
$$-\frac{1}{2m}\left(1+1+\frac{1}{1.2}+\ldots.+\frac{1}{1.2.3\ldots.m}\right),$$

ossia

$$(4)\qquad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m>\left(1-\frac{1}{2m}\right)$$
$$\times\left(1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots.+\frac{1}{1.2.3\ldots.m}\right).$$

Le disuguaglianze (2) e (4) danno

$$(5)\quad 1+1+\frac{1}{1.2}+\ldots.+\frac{1}{1.2.3\ldots.m}>\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$
$$>\left(1-\frac{1}{2m}\right)\left(1+1+\frac{1}{1.2}+\ldots.+\frac{1}{1.2.3\ldots.m}\right).$$

(*) Vedi *Aritmetica di Bertrand*, n° 360.

Ora (341*)

$$\lim\left(1-\frac{1}{2m}\right)\left(1+1+\frac{1}{1.2}+....+\frac{1}{1.2.3....m}\right)$$

$$=\lim\left(1-\frac{1}{2m}\right)\times\lim\left(1+1+\frac{1}{1.2}+....+\frac{1}{1.2.3....m}\right),$$

e poichè evidentemente

$$\lim\left(1-\frac{1}{2m}\right)=1,$$

sarà

$$\lim\left(1-\frac{1}{2m}\right)\left(1+1+\frac{1}{1.2}+....+\frac{1}{1.2.3....m}\right)$$

$$=\lim\left(1+1+\frac{1}{1.2}+....+\frac{1}{1.2.3....m}\right);$$

quindi sono eguali i limiti dell'espressioni tra le quali è compresa (5) l'espressione $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, e per conseguenza (344*)

$$e=\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \tag{6}$$

$$=\lim\left(1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+....+\frac{1}{1.2.3....m}\right).$$

347*. Se nell'espressione $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ si attribuiscono ad m valori frazionari continuamente crescenti, il limite sarà sempre dato dalla fórmola (6). Per provarlo, supponiamo che, indicando n un numero intero grandissimo, sia

$$m=n+\alpha,$$

essendo $\alpha<1$; avremo evidentemente

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{m}\right)^m>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n; \tag{1}$$

perchè, per ottenere la prima di queste espressioni, bisogna sostituire nella seconda al termine $\frac{1}{m}$ e all'esponente m rispettivamente i numeri maggiori $\frac{1}{n}$ ed $n+1$; e per ottenere la terza, bisogna alle medesime quantità sostituire i numeri minori $\frac{1}{n+1}$ ed n. Ora,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right)$$

onde (341*) e (342*)

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\times\lim\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\frac{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)};$$

ma, essendo n intero (346*),

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e,$$

e

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=1;$$

dunque

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=e;$$

e poichè nelle diseguaglianze (1) i limiti della prima e della terza espressione sono eguali ad e, sarà eguale alla stessa quantità il limite della seconda (344*) e avremo

$$\lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e,$$

anche per m frazionario.

348*. Se m è negativo il limite è sempre eguale ad e. Infatti

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right),$$

quindi (341*)

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\times\lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right),$$

ma $\lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = 1$, e $\lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e$;
dunque

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

349* L' espressione

$$e = \lim\left(1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots m}\right)$$

è un numero di cui si può calcolare il valore col grado di approssimazione che vogliamo. Per provarlo, determiniamo l'errore che si commette prendendo per m un valore intero qualunque.

È evidente che l'espressione di e si può porre sotto la forma

$$(1)\qquad e = 1+1+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots n}$$

$$+\lim\left(\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}+\frac{1}{1.2.3\ldots(n+2)}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots m}\right),$$

dove n è un numero qualunque intero minore di m.

Ora

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}=\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)},$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)(n+2)}=\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\cdot\frac{1}{n+2},$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)(n+2)(n+3)}<\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\cdot\frac{1}{(n+2)^2},$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n+4)}<\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\cdot\frac{1}{(n+2)^3},$$

. . . .

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n+m-n)}<\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\cdot\frac{1}{(n+2)^{m-n-1}};$$

onde, sommando,

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}+\frac{1}{1.2.3\ldots(n+2)}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots m}$$
$$<\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\right)$$

e

$$\lim\left(\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots m}\right)$$
$$<\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\lim\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\right);$$

ma, come è noto dall' aritmetica (*),

$$\lim\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\right)$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=\frac{n+2}{n+1};$$

onde

$$\lim\left(\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots m}\right)$$
$$<\frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\cdot\frac{n+2}{n+1};$$

(*) Vedi *Aritmetica di Bertrand*, n° 377*.

e chiamando α il primo membro di questa disegua-glianza, avremo

$$\alpha < \frac{1}{1.2.3 \ldots n+1} \cdot \frac{n+2}{n+1},$$

ed

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3 \ldots n} + \alpha,$$

dove α, che è l'errore commesso arrestandosi al termine $n+1$, diminuisce con n e si può rendere piccolo quanto si vuole.

Prendiamo, per esempio, $n = 21$; avremo

$$\alpha < \frac{1}{1.2.3 \ldots 22} \cdot \frac{23}{22} < 0{,}00000000000000000000 \ldots,$$

e le cifre significative compariscono soltanto dopo la 20^{esima}; dunque calcolando la somma dei primi 22 termini avremo 20 cifre decimali esatte, e si troverà

$$e = 2{,}71828182845904523536 \ldots$$

Limite di $\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m$.

350'. L'espressione $\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m$ coll'aumentare di m si avvicina ad un limite facile a dedursi da quanto abbiamo trovato di sopra. Infatti, poichè z è una quantità finita che non varia col variare di m, se facciamo, $m = zm'$, m' aumenterà indefinitamente con m, e avremo

$$\lim \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m = \lim \left(1 + \frac{1}{m'}\right)^{m'z}$$
$$= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{m'}\right)^{m'}\right]^z,$$

e poichè (343*),

$$\lim\left[\left(1+\frac{1}{m'}\right)^{m'}\right]^{z}=\left[\lim\left(1+\frac{1}{m'}\right)^{m'}\right]^{z}=e^{z}.$$

sarà

$$\lim\left(1+\frac{z}{m}\right)^{m}=e^{z}.$$

351*. Applicazione. Se un capitale è impiegato al frutto composto, e i frutti si capitalizzano alla fine di ogni m^{esima} di anno, avremo, indicando r il quanto per cento annuo è convenuto per il frutto semplice, che dopo un anno il capitale sarà divenuto (286)

$$C\left(1+\frac{r}{m \cdot 100}\right)^{m}.$$

Ora, se volessimo capitalizzare i frutti prodotti d'instante in instante con continuità, bisognerebbe far crescere indefinitamente m e prendere il limite, e avremmo (350*) che il capitale dopo un anno diverrebbe

$$\lim C\left(1+\frac{r}{m \cdot 100}\right)^{m}=Ce^{\frac{r}{100}}.$$

Pertanto si può dire in generale, che una grandezza C, la quale in un certo tempo produce Cz, se le quantità che vengono successivamente prodotte si riguardano come incapaci di concorrere alla produzione, ossia se in un dato tempo diviene per *semplice* aumento $C(1+z)$; nel medesimo tempo diverrà Ce^{z}, se l'aumento si fa in modo che ogni parte appena prodotta contribuisca egualmente alla produzione di nuove parti.

INDICE.